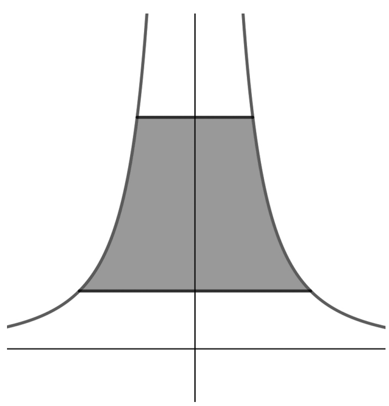
K2 MATHEMATIK KLAUSUR 1

25.10.2021

Aufgabe	1	2	3	4	A.a)	b)	c)	d)	5
Punkte (max)	3	3	6	3	2	5	2	2	4
Punkte									

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{x^2}$ und die beiden Geraden mit den Gleichungen $y = 1$ und $y = 4$ begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt.



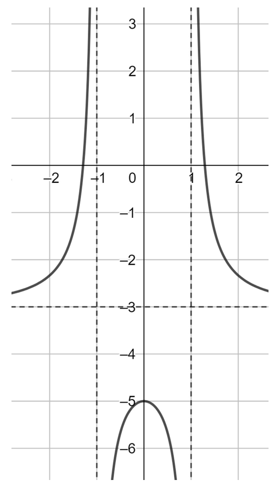
(2) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 11x_3 & = & -7 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & 14x_3 & = & 11 \end{array}$$

und interpretieren sie seine Lösungsmenge geometrisch.

(3) Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{a}{x^2 - b} + c.$$



a) Bestimmen Sie a, b und c.

b) Welche Aussagen können Sie über Extrem- und Wendepunkte einer Stammfunktion F von f machen?

c) Bestimmen Sie d so, dass $F(x) = d\ln(x-1) - d\ln(x+1) - 3x$ eine Stammfunktion von f ist.

(4) In einer Tüte sind sechs rote, drei weiße und ein grünes Gummibärchen. Anna nimmt sich drei Gummibärchen aus der Tüte und isst sie sofort.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A Es wird kein rotes Gummibärchen gezogen.

B Unter den gezogenen Gummibärchen kommt jede Farbe einmal vor.

C Es werden mehr grüne als rote Gummibärchen gezogen.

A.1 Gegeben ist die Funktion

$$g(t) = -9e^{-0{,}1t-2{,}4}.$$

a) Beschreiben Sie, wie das Schaubild von g aus dem Schaubild der Funktion f mit $f(t) = e^{-t}$ hervorgeht.

b) Ein Wirkstoff zur Entgiftung schadstoffbelasteter Erde wird auf seine Wirksamkeit überprüft. Eine Probe enthät zu Beginn 10 mg Schadstoffe. Die Funktion g beschreibt die Änderungsrate der Schadstoffmenge in einer Probe (t in Stunden nach Behandlungsbeginn, $g(t)$ in mg pro Stunde).

Bestimmen Sie die Änderungsrate der Schadstoffmenge 2 Stunden nach Beobachtungsbeginn.

Weisen Sie nach, dass die Schadstoffmenge in der Probe ständig abnimmt.

Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem die Änderungsrate der Schadstoffmenge $-0{,}5$ mg/h beträgt.

c) Ermitteln Sie einen integralfreien Term der Funktion, welche die verbleibende Schadstoffmenge in der Probe zum Zeitpunkt t darstellt.

Untersuchen Sie, ob die Schadstoffmenge langfristig unter 1 mg sinkt.

d) Es gibt einen Drei-Stunden-Zeitraum, in dem die Schadstoffmenge in der Probe um 20 % abnimmt. Geben Sie eine Gleichung an, deren Lösung den Beginn dieses Zeitraums darstellt.

A.2 Gegeben ist eine differenzierbare Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

- $f(x) > 0$ für alle reellen Werte von x;
- $f'(x) = -x \cdot f(x)$.

Begründen Sie, dass f für $x > 0$ streng monoton fallend ist.

Zeigen Sie, dass f in $x = 0$ ein Maximum besitzt.

Das Schaubild von f besitzt zwei Wendestellen; bestimmen Sie diese.

Lösungen

(1) Schnittstellen sind $x_{1,2} = \pm 2$ und $x_{3,4} = \pm 1$. Die Fläche ist

$$2 \cdot 3 + 2\int_1^2 \Big(\frac{4}{x^2} - 1\Big)\,dx6 + 2 = 8$$

wegen

$$\int_1^2 \Big(\frac{4}{x^2} - 1\Big)\,dx - \frac{4}{x} - x\Big|_1^2 = -2 - 2 - (-4 - 1) = -4 + 5 = 1.$$

(2) Das LGS schreibt sich in der Form

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Jetzt ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Jetzt folgt

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad \Big| \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

also

$$x_1(-3 + 9 - 6) + x_2(-1 - 3 + 4) + x_3(5 - 33 + 28) = -1 - 21 + 22$$

und damit $0 = 0$.

Addition der beiden letzten Gleichungen ergibt

$$x_2 + 3x_3 = 4.$$

Mit $x_3 = t$ ist dnn $x_2 = 4 - 3t$; Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$3x_1 + 4 - 3t - 5t = 1,$$

also $3x_1 = -3 + 8t$ und damit $x_1 = -1 + \frac{8}{3}t$.

Die drei Gleichungen repräsentieren Ebenen, welche die Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gemeinsam haben.

(3) Senkrechte Asymptoten sind $x = -1$ und $x = 1$; diese sind Nullstellen von $x^2 - b$, also muss $b = 1$ sein. Waagrechte Asymptote ist $y = -3$, also ist $c = -3$. Einsetzen von $(0|-5)$ ergibt $a = 2$.

b) Das Schaubild von f hat zwei Nullstellen **mit Vorzeichenwechsel**, also hat F zwei Extrempunkte: einen Tiefpunkt bei $x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$ und einen Hochpunkt bei $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$.

Weiter hat f ein Maximum in $x = 0$, also hat F dort einen Wendepunkt.

c) Wir müssen nachweisen, dass $F'(x) = f(x)$ ist. Wir finden

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{x-1} - \frac{d}{x-1} - 3 \\ &= \frac{d(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{d(x-1)}{(x-1)(x+1)} - 3 \\ &= \frac{dx + d - (dx - d)}{x^2 - 1} - 3 = \frac{2d}{x^2-1} - 3. \end{aligned}$$

Also muss $d = 1$ sein.

(4) Es ist $p(A) = p(nnn)$, wo n für „nicht rot“ steht. Damit ist

$$p(A) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}.$$

Weiter ist $p(B) = p(rwg)+p(rgq)+p(grw)+p(gwr)+p(wrg)+p(wgr) = 6 \cdot p(rwg) = 6 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{20}$.

Endlich ist $p(C) = p(gww) + p(wgw) + p(wwg) = 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$.

(5) Gegeben ist die Funktion

$$g(t) = -9e^{-0,1t-2,4}.$$

a) Es ist

$$g(t) = -9e^{-0,1(t+24)}.$$

Also muss man

- Spiegeln an der x-Achse;
- Strecken mit Faktor 9 in y-Richtung;
- Strecken mit Faktor 10 in x-Richtung;
- Verschieben um 2,4 nach links.

b) $g(2) \approx -0{,}67$; Änderungsrate $-0{,}67$ mg/h.

$g(t) = -9e^{-0,1t-2,4}$ ist negativ wegen $-9 < 0$ und $e^{-0,1t-2,4} > 0$ für alle t. Also sinkt die Schadstoffmenge.

$g(t) = -0{,}5$ liefert

$$\begin{aligned} -9e^{-0,1t-2,4} &= -0{,}5 && \Big| : (-9) \\ e^{-0,1t-2,4} &= \frac{1}{18} \\ -0{,}1t - 2{,}4 &= \ln(\tfrac{1}{18}) \\ -0{,}1t &= \ln(\tfrac{1}{18}) + 2{,}4 && \Big| \cdot (-10) \\ t &= -10\ln(\tfrac{1}{18}) + 24 \approx -4{,}9 \end{aligned}$$

Nach etwa 4,9 h ist die Änderungsrate gleich $-0{,}5$ mg/h.

c) Es ist

$$\begin{aligned} S(t) &= 10 + \int_0^t -9e^{-0{,}1t-24}\,dt \\ &= 10 + [90e^{-0{,}1t-24}]_0^t \\ &= 10 + 90e^{-0{,}1t-24} - 90e^{-2{,}4} \\ &\approx 90e^{-0{,}1t-24} + 8{,}16 \end{aligned}$$

Alternativ: $S(t) = 90e^{-0{,}1t-24} + c$ und $S(0) = 10$ ergibt $c = 8{,}16$.

Die Schadstoffmenge sinkt langfristig auf 8,16 mg, also nicht unter 1 mg.

d) $g(t+3) = 0{,}8g(t)$.

(6) f ist streng monoton fallend für alle $x > 0$, weil $f'(x) = -xf(x) < 0$ ist für diese x.

$f''(x) = -f(x) - xf'(x) = -f(x) - x(-xf(x)) = (x^2-1)f(x)$.
Also ist $f'(0) = 0$ und $f''(0) = -f(0) < 0$. Somit liegt ein Maximum vor.

$f''(x) = (x^2-1)f(x) = 0$ ergibt $x = \pm 1$ mit dem Satz vom Nullprodukt. Die Wendestellen sind also $x_1 = -1$ und $x_2 = +1$.