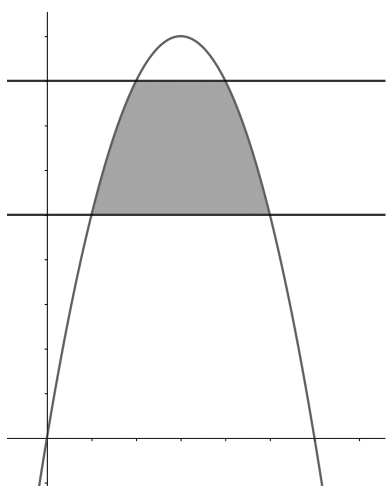
K2 MATHEMATIK KLAUSUR 2

14.01.2022

Aufgabe	1	2	3	4	A.1.a)	b)	c)	A.2
Punkte (max)	3	3	5	2	2	8	2	5
Punkte								

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) Gegeben sind die Funktion $f(x) = 9-(x-3)^2$, sowie die beiden Geraden $y = 5$ und $y = 8$. Berechnen Sie den Inhalt der von diesen Schaubildern eingeschlossenen Fläche.



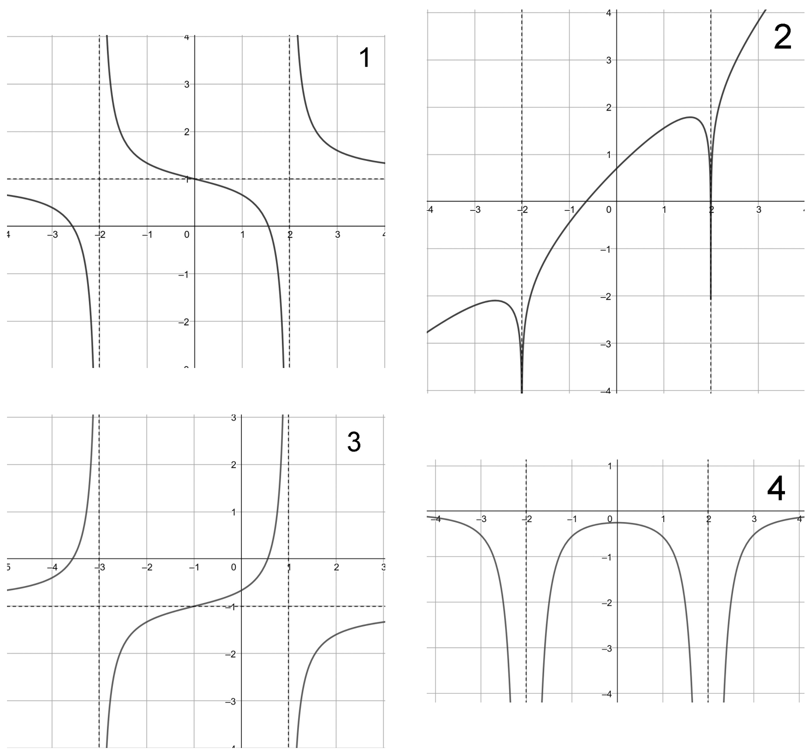
(2) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \end{array}$$

(3) Abbildung 1 zeigt das Schaubild der Funktion

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - a} + b.$$

Zwei weitere Abbildungen gehören zur Ableitung f' und zu einer Stammfunktion F von f.



a) Ordnen Sie f' und F die richtigen Abbildungen zu, und begründen Sie Ihre Wahl.

b) Bestimmen Sie a und b.

c) Geben Sie einen Funktionsterm für die Funktion g an, die in der Abbildung dargestellt wird, die nicht zu f, F oder f' gehört.

(4) In einer Urne liegen fünf weiße Kugeln und eine schwarze Kugel. Aus der Urne wird eine Kugel zufällig gezogen. Ist die gezogene Kugel schwarz, wird sie in die Urne zurückgelegt. Ist sie weiß, wird an ihrer Stelle eine schwarze Kugel in die Urne gelegt.

Es wird dreimal gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

A Genau eine Kugel ist schwarz.

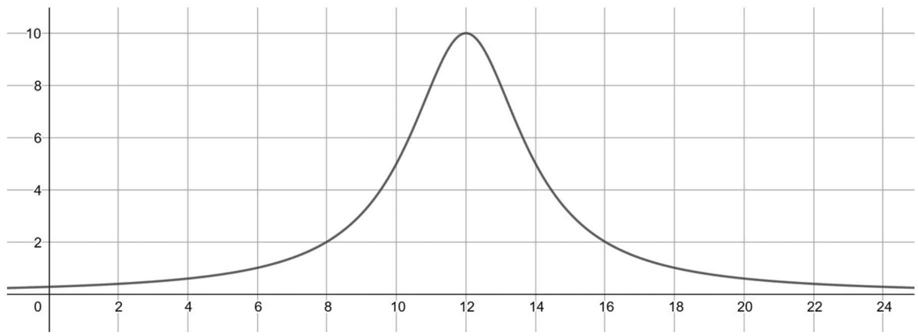
B Mindestens eine Kugel ist schwarz.

A.1

Betrachtet wird die Funktion

$$p(x) = \frac{40}{(x-12)^2+4}.$$

Die folgende Abbildung zeigt das Schaubild G_p von p:



a) Beschreiben Sie, wie G_p aus dem Schaubild der Funktion

$$f(x) = \frac{5}{x^2+4}$$

hervorgeht.

Eine auf einem Hausdach installierte Photovoltaikanlage wandelt Lichtenergie in elektrische Energie um. Für $4 \le x \le 20$ beschreibt die Funktion p modellhaft die zeitliche Entwicklung der Leistung der Anlage an einem bestimmten Tag. Dabei ist x die seit Mitternacht vergangene Zeit in Stunden und $p(x)$ die Leistung in kW (Kilowatt).

b) Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, an dem die Anlage die maximale Leistung erbringt, und berechnen Sie diese maximale Leistung.

Bestimmen Sie rechnerisch die Uhrzeit am Nachmittag auf Minuten genau, ab der die Leistung der Anlage weniger als 40 % ihres Tageshöchstwerts beträgt.

Die Funktion p besitzt im Intervall $[4; 12]$ eine Wendestelle. Geben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang an.

c) Die von der Anlage produzierte elektrische Energie wird vollständig in das Stromnetz eingespeist. Der Hauseigentümer erhält für die eingespeiste elektrische Energie eine Vergütung von 10 Cent pro Kilowattstunde (kWh).

Die für $4 \leq x \leq 20$ definierte Funktion $E(x)$ gibt die elektrische Energie in kWh an, die die Anlage am betrachteten Tag von 4:00 Uhr bis x Stunden nach Mitternacht in das Stromnetz einspeist.

Es gilt $E'(x) = p(x)$ für $4 \leq x \leq 20$.

Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Vergütung, die der Hauseigentümer für die von 10:00 Uhr bis 14:00 Uhr in das Stromnetz eingespeiste elektrische Energie erhält.

A.2. Betrachtet wird die durch

$$h_k(x) = (1 - kx^2)e^{-x}$$

definierte Funktionenschar.

a) Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von h_k in Abhängigkeit von k an.

b) Bestimmen Sie k so, dass das Schaubild H_k von h_k zwei Nullstellen besitzt, welche Abstand 4 voneinander haben.

Lösungen

(1) Schnittpunkte von f mit $y = 8$: $9 - (x-3)^2 = 8$ führt auf $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$.

Schnittpunkte von f mit $y = 8$: $9 - (x-3)^2 = 5$ führt auf $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$.

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \int_1^2 (f(x) - 5)\, dx + 2 \cdot 3 \\ &= 2\Big[4x - \frac{1}{3}(x-3)^2\Big]_1^2 + 6 = \frac{28}{3}. \end{aligned}$$

(2) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \end{array}$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Big| \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{aligned}$$

$(II) - (I)$: $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$ ergibt $x_2 = t$ und $x_1 = \frac{1}{2} - t$, damit $x_3 = \frac{5}{2} - 2t$. Also ist

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

die Gleichung der Schnittgerade.

(3) a) Ordnen Sie f' und F die richtigen Abbildungen zu, und begründen Sie Ihre Wahl.

Das Schaubild von f' hat waagrechte Asymptote $y = 0$ und gehört daher zu Schaubild 4.

Alternativ: f ist überall streng monoton fallend, also muss das Schaubild der Ableitung f' vollständig unterhalb der x-Achse liegen.

Oder: Weil f punktsymmetrisch ist, muss f' achsensymmetrisch sein.

Das Schaubild von f hat zwei Nullstellen mit VZW zwischen, also muss das Schaubild von F zwei Extrempunkte besizten. Damit gehört F zu Abb. 4.

b) Bestimmen Sie a und b.

Senkrechte Asymptoten sind $x = -2$ und $x = +2$; also muss $x^2 - a = 0$ diese Lösungen besitzen. Damit ist $a = 4$.

Einsetzen von $x = 0$ ergibt $b = 1$.

c) Man erhält das Schaubild in Abb. 3, wenn man das in Abb. 1 an der x-Achse spiegelt und dann um 1 nach links verschiebt:

$$g(x) = -f(x+1).$$

(4) $p(A) = p(sww) + p(wsw) + p(wws) = \frac{20+40+60}{216} = \frac{5}{9}$.

$p(B) = 1 - p(www) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$.

A.1

a) Strecken mit Faktor 8 in y-Richtung und Verschieben um 12 nach rechts.

b) $p'(x) = \frac{80(x-12)}{((x-12)^2+4)^2} = 0$ liefert $x = 12$; $p(12) = 10$.

Die maximale Leistung erbringt die Anlage um 12:00 Uhr, nämlich 10 kWh.

$$\begin{aligned} \frac{40}{(x-12)^2+4} &= 4 && \Big| \cdot ((x-12)^2+4) \\ 40 &= 4((x-12)^2+4) && \Big| : 4 \\ 10 &= (x-12)^2+4 && \Big| -4 \\ 6 &= (x-12)^2 \end{aligned}$$

Also ist $x = 12 + \sqrt{6} \approx 14{,}45$. Wegen $60 \cdot 0{,}4495 \approx 26{,}97$ ist dies um 14:27 Uhr der Fall.

An der Wendestelle etwa bei $x = 10$ steigt die Leistung der Anlage am stärksten.

c) Zu bestimmen ist die Fläche unter dem Schaubild von p zwischen $x = 10$ und $x = 14$; Abzählen der Kästchen liefert eine Energie von Etwa 31 kWh. Der Hauseigentümer erhält also etwa 3 Euro und 10 ct.

A2.1. Betrachtet wird die durch

$$h_k(x) = (1 - kx^2)e^{-x}$$

definierte Funktionenschar.

a) Satz vom Nullprodukt un $e^{-x} \neq 0$ liefert $1 - kx^2 = 0$, also $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{k}}$, falls $k > 0$ ist; andernfalls existieren keine Nullstellen.

Abstand 4 liefert $2\frac{1}{\sqrt{k}} = 4$, also $\sqrt{k} = \frac{1}{2}$ und damit $k = \frac{1}{4}$.