K2 MATHEMATIK KLAUSUR 1

25.10.2021

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Punkte (max)	2	2	3	3	5	4	4	3	3	1
Punkte										

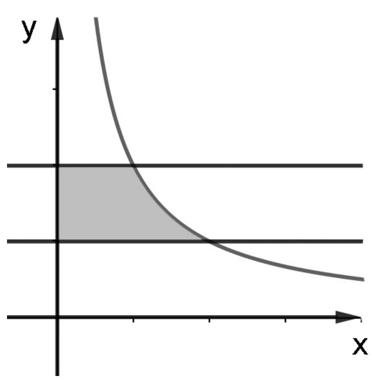
Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit
$$f(x) = (x^2 - x)^3 \cdot e^{-2x}.$$

(2) Die Funktion f ist gegeben durch
$$f(x) = \frac{2}{x} + 1.$$
Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f derart, dass $F(e) = e$ ist.

(3) Gegeben sind die Funktionen $f(x) = e^x$ und $g(x) = 4 - \frac{3}{e^x}$. Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Schaubilder.

(4) Die Schaubilder der Funktionen $f(x) = \frac{2}{x}$, $y = 1$ und $y = 2$ begrenzen mit der y-Achse eine Fläche. Bestimmen Sie deren Flächeninhalt.



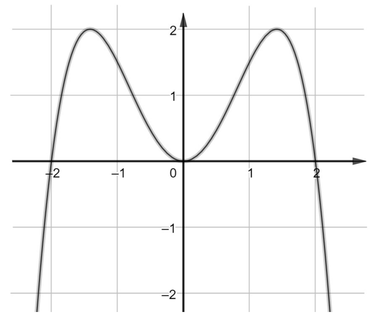
(5) Abgebildet ist der Graph einer Funktion f. Sei F eine Stammfunktion von f.

a) Begründen Sie, welche der folgenden Aussagen wahr, falsch oder unentscheidbar sind.

(1) Das Schaubild von F besitzt drei Extrempunkte.

(2) Das Schaubild von F besitzt zwei Wendepunkte.

(3) Es ist $F(2) > F(1)$.



b) Bestimmen Sie $\int_0^2 f'(x)\,dx$.

c) Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion. Begründen Sie, dass der Grad von f mindestens 4 ist.

(6) Gegeben ist die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, sowie eine weitere Gerade h, welche parallel zu g ist und durch den Punkt $A(2|0|0)$ verläuft. Der Punkt B liegt auf g so, dass die Geraden AB und h senkrecht zueinander sind.

(a) Bestimmen Sie die Koordinaten von B.

(b) Berechnen Sie den Abstand von g und h.

(7) Gegeben sind die Punkte $P(-2|3|0)$, $R(2|-1|2)$ und $Q(q|1|5)$. Der Punkt Q ist genauso weit von P entfernt wie von R.

(a) Bestimmen Sie q.

(b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Eckpunkts S der Raute PQRS. Zeigen Sie, dass PQRS kein Quadrat ist.

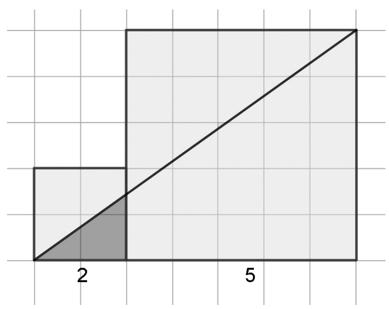
(8) Gegeben sind die Punkte $A(5|0|a)$ und $B(2|4|5)$. Der Koordinatenursprung wird mit O bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie a so, dass A und B Abstand 5 haben.

(b) Bestimmen Sie a so, dass das Dreieck OAB im Punkt B rechtwinklig ist.

(9) Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 8$. Bestimmen Sie diejenigen Punkte auf der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, welche von der Ebene E den Abstand 6 haben.

(10) Gegeben sind zwei Quadrate mit Seitenlängen 2 und 5. Bestimme den Inhalt der dunklen Fläche.



Lösungen

(1) Produktregel:

$$f'(x) = 3(x^2 - x)^2(2x - 1) \cdot e^{-x} - 2(x^2 - x)^3 \cdot e^{-2x}.$$

(2) Stammfunktion ist

$$F(x) = 2\ln(x) + x + c.$$

$F(e) = e$ liefert $e = 2 + e + c$, also $c = -2$.

(3) Gleichsetzen und Wegheben der Nenner ergibt

$$\begin{aligned} e^x &= 4 - \frac{3}{e^x} && \Big|\ \cdot e^x \\ e^{2x} &= 4e^x - 3 && \Big|\ -4e^x + 3 \\ e^{2x} - 4e^x + 3 &= 0 && \Big|\ \text{Vieta} \\ (e^x - 1)(e^x - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Dies liefert $x_1 = 0$ und $x_2 = \ln 3$, und damit $y_1 = 1$ sowie $y_2 = e^{\ln 3} = 3$. Die Schnittpunkte sind also $S_1(0|1)$ und $S_2(\ln 3|3)$.

(4) Berechnung der Schnittpunkt von f mit den Geraden ergibt $S(2|1)$ und $T(1|2)$. Die Fläche besteht also aus einem Rechteck mit der Fläche $A_1 = 1 \cdot 1 = 1$ und einer krummlinigen Fläche mit Inhalt

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_1^2 (f(x) - 1)\, dx = \int_1^2 \Big(\frac{2}{x} - 1\Big)\, dx \\ &= 2\ln(x) - x\Big|_1^2 = 2\ln(2) - 2 - (2\ln(1) - 1) = 2\ln(2) - 1. \end{aligned}$$

Also ist die Gesamtfläche $A = A_1 + A_2 = 2\ln(2)$.

(5) a) Es gilt:

(1) Die Aussage ist falsch, weil das Schaubild von f nur zwei Nullstellen mit Vorzeichenwechsel besitzt.

(2) Die Aussage ist falsch, weil das Schaubild von f drei Extrempunkte besitzt.

(3) Die Aussage ist wahr: im Intervall $(1; 2]$ ist f positiv, also F streng monoton steigend. Alternativ ist

$$F(2) - F(1) = \int_1^2 f(x)\ dx = \approx 1{,}8.$$

b) Wir finden

$$\int_0^2 f'(x)\, dx = f(x)\Big|_0^2 = f(2) - f(0) = 0 - 0 = 0.$$

c) Weil das Schaubild von f drei Extrempunkte besitzt, hat die Ableitung f' drei Nullstellen und daher Grad ≥ 3. Also hat f mindestens Grad 4.

(6) Gerade $h : \vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + t \cdot \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Lotebene E durch A: $3x_1 + 4x_2 = 6$. Lotfußpunkt ist Schnittpunkt von E mit g; Schneiden liefert $3(1+3t) + 4(7+4t) = 6$, also $25t = -25$ und damit $t = -1$. Also ist $B(-2|3|2)$.

Abstand $d(g,h) = d(A,B) = \overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.

(7) a) $\overline{PQ} = \sqrt{(q+2)^2 + 2^2 + 5^2}$, $\overline{RQ} = \sqrt{(q-2)^2 + 2^2 + 3^2}$. Gleichsetzen und Quadrieren liefert

$$\begin{aligned} (q+2)^2 + 2^2 + 5^2 &= (q-2)^2 + 2^2 + 3^2 \\ q^2 + 4q + 33 &= q^2 - 4q + 17 \\ 8q &= -16, \end{aligned}$$

also $q = -2$.

b) $P(-2|3|0)$, $Q(-2|1|5)$, $R(2|-1|2)$; $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ liefert $S(2|1|-3)$.

Wegen $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) \cdot \overrightarrow{4} -2-3 = 4 - 15 \neq 0$ ist die Raute kein Quadrat.

(8) a) $\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2 + (5-a)^2} = 5$ ergibt $a = 5$.

b) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 4 \\ 5-a \end{smallmatrix}\right) = -6 + 16 + 5(5-a) = 0$ergibt $a = 7$.

(9) HNF von E: $\frac{2x_1 + x_2 - 2x_3 - 8}{3} = 0$. Abstand laufender Punkt $P(2+t|3+t|-5)$ von E gleich 6 setzen:

$$6 = \frac{|2(2+t) + 3 + t + 10 - 8|}{3} = \frac{|9+3t|}{3} = |3+t$$

führt auf $3 + t = \pm 6$, also $t_1 = 3$ und $t_2 = -9$. Die beiden Punkte sind daher $P_1(5|6|-5)$ und $P_2(-7|-6|-5)$.

(10) Sei h die Höhe des dunklen Dreiecks. Nach dem Strahlensatz ist $h : 2 = 5 : 7$, also $h = \frac{10}{7}$ und damit $A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{10}{7} = \frac{10}{7}$.

Alternativ kann man ein Koordinatensystem so einführen, dass das linke Ecke im Ursprung liegt und die Achsen parallel bzw. orthogonal zu den Seiten sind. Die Gerade durch (0,0) und (7,5) hat die Gleichung $y = \frac{5}{7}x$, und Einsetzen von $x = 2$ ergibt $h = \frac{10}{7}$.

Oder man rechnet die Steigung der Geraden auf zwei Arten aus: $\frac{5}{7} = \frac{h}{2}$.

Wer gar keine Skrupel kennt, kann auch ein Integral benutzen:

$$\int_0^2 \frac{5}{7}x\,dx = \frac{5}{14}x^2\Big|_0^2 = \frac{10}{7}.$$