# HYPOTHESENTEST UND IRRTUMSWAHRSCHEINLICHKEIT

F. LEMMERMEYER

## Schema

Für einen einseitigen Test bei einem Experiment, das $n$ mal gemacht wird, haben wir folgendes Schema:

| | linksseitiger Test | rechtsseitiger Test |
|---|---|---|
| Nullhypothese | $p \geq p_0$ | $p \leq p_0$ |
| Ablehungsbereich | $[0; k]$ | $[k; n]$ |
| Bedingung für $k$ | $p(X \leq k) \leq \alpha$ | $p(X \geq k) \leq \alpha$ |

- Wahrscheinlichkeit groß ($p \geq p_0$): ablehnen, wenn Trefferzahl klein ($p(X \leq k)$).
- Wahrscheinlichkeit klein ($p \leq p_0$): ablehnen, wenn Trefferzahl groß ($p(X \geq k)$).

Bei Klassenarbeiten ist es natürlich wichtig, für solche Aufgaben keine halbe Stunde zu verbraten. Was ihr macht, ist folgendes.

(1) Bei einem linksseitigen Test $H_0 : p \geq p_0$ wird abgelehnt, wenn das Ereignis zu selten ist. Springt die Wahrscheinlichkeit zwischen $k$ und $k+1$ über das Signifikanzniveau (meist 5 %, aber manchmal nimmt man weniger), dann ist der Ablehnungsbereich $[0; k]$ und der Annahmebereich $[k+1; n]$, wo $n$ die Anzahl der Versuche bezeichnet.

(2) Bei einem rechtsseitigen Test $H_0 : p \leq p_0$ wird abgelehnt, wenn das Ereignis zu häufig ist. Aus $p(X \geq k) < \alpha$ folgt $1 - p(X \leq k-1) < \alpha$; man muss wieder das kleinste $k$ nehmen, ab dem die Wahrscheinlichkeit über das Signifikanzniveau springt.

## Aufgaben

Die folgenden Aufgaben sind aus irgendeinem Lambacher-Schweizer.

(1) Ein Losbudenbesitzer wirbt damit, dass 70 % seiner Lose gewinnen. Ein Besucher kauft 20 Lose. Bei welcher Anzahl von Gewinnlosen kann er den Losbudenbesitzer beschuldigen[1], eine falsche Behauptung verbreitet zu haben, wenn er sich höchtstens mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % irren will?

Antwort: Er fängt an zu stänkern, wenn er maximal 10 Gewinne einstreicht.

(2) Ein Händler behauptet von seiner Ware, dass höchstens 3 % fehlerhaft sind. Es soll der Verdacht überprüft werden, dass diese Angabe zu niedrig ist und setzt[2] dabei eine Irrtumswahrscheinlichkeit[3] von 5 % bei einem Stichprobenumfang von 50 an. Ermitteln Sie den Ablehnungsbereich.[4]

Antwort: Ablehnungsbereich $[5; 50]$.

(3) Ein Schütze behauptet eine Trefferwahrscheinlichkeit von mindestens 95 %.[5] Mit einer Serie von 200 Schüssen wurde das getestet. Dabei erreichte der Schütze nur 184 Treffer. Wegen dieses Resultats wird seine Behauptung als falsch eingeschätzt. Wie groß ist die Wahrtscheinlichkeit, dass man sich dabei irrt?

Antwort: mit $p = p(X \leq 184) \approx 0{,}044$.

---

[1] Das ist zwar nicht auf meinem Mist gewachsen, aber ich möchte mich trotzdem für die Dämlichkeit der Aufgabe entschuldigen.

[2] Das Deutsch stammt von Klett, nicht von mir. Wer setzt hier an – "Es"?

[3] Klett meint Signifikanzniveau – ihr werdet euch davon doch nicht verwirren lassen?

[4] Kürzer: $n = 50$, $H_0 : p \leq 0{,}03$, $\alpha = 0{,}05$; der Rest der Aufgabe besteht aus Distraktoren.

[5] Klett-Deutsch. Als Service am Kunden will ich es ins Deutsche übersetzen: "Ein Schütze behauptet, er treffe mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 %.

(4) Bei der Produktion einer speziellen Fliesenart treten bei 5 % der Fliesen feine Haarrisse auf.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 300 gekauften Fliesen weniger als 20 mangelhafte Fliesen befinden.

(b) Für eine Wandfläche werden 230 Fliesen benötigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit reichen 240 gekaufte Fliesen aus, wenn man nur einwandfreie Fliesen verarbeiten will?

(c) Das Werk lässt die betreffende Maschine von einem Handwerksbetrieb technisch überholen. Danach soll getestet werden, ob der Mangelanteil noch 5 % beträgt oder auf 1 % gesunken ist, wie der Handwerksbetrieb versprochen hat[6] Er[7] will die Hypothese $p = 0{,}01$[8] genau dann verwerfen, wenn sich in seiner Stichprobe vom Umfang $n = 200$ mindestens 6 mangelhafte Fliesen befinden. Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er diese Hypothese verwirft, obwohl sie wahr ist.

Antwort: a) $p \approx 0{,}881$; b) $p \approx 0{,}342$; c) $p \approx 0{,}016$.

[6] Man kann natürlich nicht beides tun. Die 5 % dienen nur der Verwirrung; die Nullhypothese ist $p \leq 0{,}01$.

[7] Gemeint ist "es", nämlich das Werk. Oder will *der* Handwerksbetrieb seine eigene Behauptung widerlegen?

[8] Die Nullhypothese nochmal für die, die sich verwirren lassen haben; dass hier $p = 0{,}01$ steht statt $p \leq 0{,}01$ liegt daran, dass die Aufgabensteller auch nicht recht wissen, was sie da eigentlich machen.

## Lösungen

(1) *Ein Losbudenbesitzer wirbt damit, dass 70 % seiner Lose gewinnen.*

Normalerweise steht die Nullhypothese expülizit dabei. Hier wird man davon ausgehen dürfen, dass der Losbudenbesitzer meint, dass mindestens dass 70 % seiner Lose gewinnen. Damit ist $H_0 : p \geq 0{,}7$.

*Ein Besucher kauft 20 Lose. Bei welcher Anzahl von Gewinnlosen kann er den Losbudenbesitzer beschuldigen, eine falsche Behauptung verbreitet zu haben, wenn er sich höchtstens mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % irren will?*

Zumindest $n = 20$ und $\alpha = 0{,}05$ stehen unmissverständlich da. Die Behauptung ist, dass mindestens 70 % der Lose gewinnen; also wird abgelehnt, wenn es zu wenige Gewinnlose gibt. Wir schreiben:

- $X$ sei die Anzahl der Gewinnlose.
- $X$ ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0{,}7$.
- Ablehnungsbereich $[0; k]$
- Ansatz: $p(X \leq k) < 0{,}05$.

Jetzt muss man probieren. Wir erwarten $E = np = 20 \cdot 0{,}7 = 14$ Gewinnlose und lehnen ab, wenn es deutlich weniger sind.

$$p(X \leq 11) \approx 0{,}113$$
$$p(X \leq 10) \approx 0{,}048$$

Die Wahrscheinlichkeit, höchstens 10 Gewinnlose zu ziehen, ist also kleiner als das Signifikanzniveau; der Ablehnungsbereich ist $[0; 10]$, die Entscheidungsregel *Wenn höchstens 10 Gewinne dabei sein, wird die Nullhypothese abgelehnt, sonst nicht.*

(2) *Ein Händler behauptet von seiner Ware, dass höchstens 3 % fehlerhaft sind. Es soll der Verdacht überprüft werden, dass diese Angabe zu niedrig ist und setzt dabei eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % bei einem Stichprobenumfang von 50 an.*

- $X$ sei die Anzahl der fehlerhaften Geräte.
- $X$ ist binomialverteilt mit $n = 50$ und $p = 0{,}03$

- Nullhypothese $H_0 : p \leq 0{,}03$
- Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$

Abgelehnt wird, wenn es viele fehlerhafte Geräte gibt: $A = [k; 50]$, wobei $p(X \geq k) < 0{,}05$ sein soll. Wir erwarten $E = 50 \cdot 0{,}03 = 1{,}5$ defekte Geräte. Wenn es deutlich mehr sind, lehnen wir die Nullhypothese ab.

$$p(X \geq 3) = 1 - p(X \leq 2) \approx 0{,}189$$
$$p(X \geq 4) = 1 - p(X \leq 3) \approx 0{,}062$$
$$p(X \geq 5) = 1 - p(X \leq 4) \approx 0{,}017$$

Also ist der Ablehnungsbereich $A = [5; 50]$. Entscheidungsregel: *Sind mehr als vier Geräte defekt, wird die Nullhypothese abgelehnt, sonst nicht.*

Antwort: Ablehnungsbereich $[5; 50]$.

(3) *Ein Schütze behauptet eine Trefferwahrscheinlichkeit von mindestens 95 %. Mit einer Serie von 200 Schüssen wurde das getestet. Dabei erreichte der Schütze nur 184 Treffer. Wegen dieses Resultats wird seine Behauptung als falsch eingeschätzt. Wie groß ist die Wahrtscheinlichkeit, dass man sich dabei irrt?*

Dies ist kein klassischer Hypothesentest, weil das Signifikanzniveau fehlt. Was wir trotzdem sagen können:

- $X$ ist die Anzahl der Treffer
- $X$ ist binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = 0{,}95$.

Bei 200 Versuchen erwartet man $E = 200 \cdot 0{,}95 = 190$ Treffer. Weil der Schütze nur 184 mal trifft, lehnt man seine Behauptung ab. Man irrt sich, wenn die Behauptung stimmt, obwohl er höchstens 184 mal trifft (man hätte ja auch abgelehnt, wenn er noch seltener getroffen hätte). Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist daher die Wahrscheinlichkeit, dass $X \leq 184$ ist:

$$p(X \leq 184) \approx 0{,}044.$$

Man irrt sich mit einer Wahrscheinlichkeit von maximal 4,4 %.

(4) Bei der Produktion einer speziellen Fliesenart treten bei 5 % der Fliesen feine Haarrisse auf.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 300 gekauften Fliesen weniger als 20 mangelhafte Fliesen befinden.

(b) Für eine Wandfläche werden 230 Fliesen benötigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit reichen 240 gekaufte Fliesen aus, wenn man nur einwandfreie Fliesen verarbeiten will?

(c) Das Werk lässt die betreffende Maschine von einem Handwerksbetrieb technisch überholen. Danach soll getestet werden, ob der Mangelanteil noch 5 % beträgt oder auf 1 % gesunken ist, wie der Handwerksbetrieb versprochen hat[9] Er will die Hypothese $p = 0{,}01$ genau dann verwerfen, wenn sich in seiner Stichprobe vom Umfang $n = 200$ mindestens 6 mangelhafte Fliesen befinden. Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er diese Hypothese verwirft, obwohl sie wahr ist.

Der Reihe nach:

- $X$ ist die Anzahl der Fliesen mit Haarrissen.
- $X$ ist binomialverteilt mit $n = 300$ und $p = 0{,}05$.

(a) Achtung Falle: Weniger als 20 sind höchstens 19, also $p(X \leq 19) = 0{,}881$.

(b) Es werden 240 Fliesen gekauft, also ist $n = 240$. Damit 230 Fliesen in Ordnung sind, dürfen höchstens 10 davon Haarrisse haben.

$$p(X \leq 10) \approx 0{,}342.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 34 % reichen die Fliesen aus.

(c) Jetzt kommt wieder eine Frage nach der Irrtumswahrscheinlichkeit:

- $X$ ist die Anzahl der Fliesen mit Mängeln. $X$ ist binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = 0{,}01$.
- Nullhypothese $p \leq 0{,}01$.

[9]Man kann natürlich nicht beides tun. Die 5 % dienen nur der Verwirrung; die Nullhypothese ist $p \leq 0{,}01$.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass er ablehnt, obwohl die Nullhypothese stimmt. Es geht also um

$$p(X \geq 6) = 1 - p(X \leq 5) \approx 0{,}016.$$

Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist etwa 1,6 %.

Antwort: a) $p \approx 0{,}881$; b) $p \approx 0{,}342$; c) $p \approx 0{,}016$.

Die bei einem Hypothesentest gemachten Fehler haben Namen, die man sich vor dem Abitur einprägen sollte:

- Lehnt man die Nullhypothese ab, obwohl sie richtig ist, spricht man von einem Fehler erster Art.
- Lehnt man die Nullhypothese nicht ab, obwohl sie falsch ist, spricht man von einem Fehler zweiter Art.

Wenn es also heißt *Berechne die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art*, dann muss man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass man die Nullhypothese ablehnt, obwohl sie richtig ist. Das haben wir oben in Aufgabe 3) und 4c) gemacht. Die Irrtumswahrscheinlichkeit bei einem Fehler ester Art ist immer kleiner als das Signifikanzniveau. Man nennt das Signifikanzniveau deswegen auch manchmal die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit.