K2 MATHEMATIK TEST1

09.10.2018

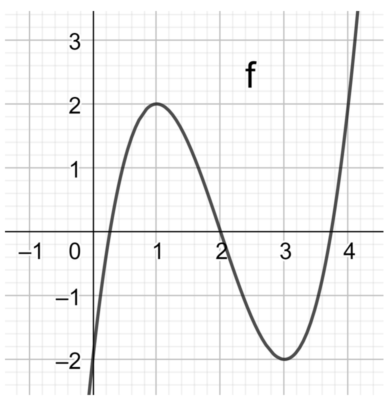
Aufgabe	1	2	3	4
Punkte (max)	2	3	3	7
Punkte				

(1) Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \dfrac{5e^x + 1}{5x}$.

(2) Bestimmen Sie das Integral $\displaystyle\int_2^{e+1} \left(\frac{2}{x-1} - 1\right) dx$.

(3) Lösen Sie die Gleichung $(e^{-x} - 2)(e^{2x} - 1) = 0$.

(4) Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f. Sei F eine Stammfunktion von f.



Welche der Aussagen a) bis d) sind wahr, falsch oder unentscheidbar? Begründen Sie Ihre Behauptungen.

a) F ist für $1 < x < 3$ monoton fallend.

b) Das Schaubild von F besitzt in $x = 2$ einen Hochpunkt.

c) Das Schaubild von F besitzt zwei Wendepunkte.

d) Es gilt $F(1) > F(2)$.

e) Sei $g(x) = x \cdot f(x)$. Bestimmen Sie $g'(3)$.

(1) Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \dfrac{5e^x + 1}{5x}$.

1. Möglichkeit: Bruch auseinander ziehen

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{5e^x + 1}{5x} = \frac{5e^x}{5x} + \frac{1}{5x} = e^x \cdot x^{-1} + \frac{1}{5}x^{-1} \\ f'(x) &= e^x \cdot x^{-1} - e^x \cdot x^{-2} - \frac{1}{5}x^{-2} = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{5x^2} \end{aligned}$$

2. Möglichkeit: Quotientenregel

$$u(x) = 5e^x + 1, \quad v(x) = 5x.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{5e^x \cdot 5x - (5e^x + 1) \cdot 5}{(5x)^2} \\ &= \frac{25xe^x - 25e^x - 5}{25x^2} = \frac{5xe^x - 5e^x - 1}{5x^2} \end{aligned}$$

3. Möglichkeit: x nach oben ziehen

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{5e^x + 1}{5x} = \frac{1}{5}(5e^x + 1)x^{-1} \\ f'(x) &= \frac{1}{5} \cdot 5e^x \cdot x^{-1} - \frac{1}{5}(5e^x + 1)x^{-2} \\ &= \frac{e^x}{x} - \frac{5e^x + 1}{5x^2} \end{aligned}$$

4. Möglichkeit: $5x$ nach oben ziehen

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{5e^x + 1}{5x} = (5e^x + 1) \cdot (5x)^{-1} \\ f'(x) &= 5e^x \cdot (5x)^{-1} + (5e^x + 1) \cdot (-(5x)^{-2} \cdot 5) \\ &= \frac{5e^x}{5x} - 5(5e^x + 1) \cdot (5x)^{-2} \\ &= \frac{e^x}{x} - \frac{5(5e^x + 1)}{25x^2} = \frac{e^x}{x} - \frac{5e^x + 1}{5x^2} \end{aligned}$$

(2) Bestimmen Sie das Integral $\displaystyle\int_2^{e+1} \left(\frac{2}{x-1} - 1\right) dx$.

$$\begin{aligned}\int_2^{e+1} \left(\frac{2}{x-1} - 1\right) dx &= 2\ln(x-1) - x\Big|_2^{e+1} \\ &= 2\ln(e+1-1) - (e+1) - [2\ln(1) - 2] \\ &= 2\ln(e) - e - 1 - 0 + 2 = 3 - 3.\end{aligned}$$

Beachte: $\ln(e) = 1$ wegen $e^1 = e$ und $\ln(1) = 0$ wegen $e^0 = 1$.

(3) Lösen Sie die Gleichung $(e^{-x} - 2)(e^{2x} - 1) = 0$.

Satz vom Nullprodukt: $e^{-x} = 2$ ergibt $-x = \ln 2$, also $x_1 = -\ln 2$.

Schreibt man $\frac{1}{e^x} = 2$, folgt $x_1 = \ln \frac{1}{2}$, aber $\ln \frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2$.

Entsprechend folgt aus $e^{2x} = 1$ sofort $x_2 = 0$.

(4) Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f. Sei F eine Stammfunktion von f.

a) Diese Aussage ist falsch, weil das Schaubild von f in diesem Bereich nicht vollständig unterhalb der x-Achse liegt (bzw. weil f in diesem Bereich auch positive Werte annimmt).

b) Diese Aussage ist wahr, weil f in $x = 2$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ besitzt.

c) Diese Aussage ist wahr, weil das Schaubild von f zwei Extrempunkte besitzt.

d) Es ist $F(2) - F(1) = \int_1^2 f(x)\, dx \approx 1,3 > 0$, also ist die Aussage falsch.

e) Sei $g(x) = x \cdot f(x)$. Bestimmen Sie $g'(3)$.

Es ist $g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$ (Produktregel), also $f'(3) = f(3) + 3f'(3) = -2$ wegen $f'(3) = 0$.