K2 MATHEMATIK KLAUSUR 3

23.04.2021

Pflichtteil

(1) Die Parabel mit der Gleichung $f(x) = (x-4)^2 + 1$ teilt das angegebene Quadrat mit Seitenlänge 5 in zwei Teile. Bestimmen Sie das Verhältnis der beiden Flächen.

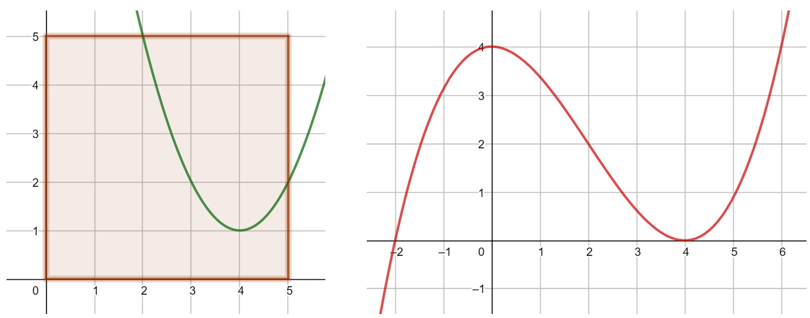


Abbildung 1. Funktion f (links: Aufgabe 1; rechts: Aufgabe 2)

(2) Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f. Weiter ist $g(x) = -f(2x)$.

a) Beschreiben Sie, wie das Schaubild von g aus demjenigen von f hervorgeht.

b) Geben Sie die Nullstellen und die Koordinaten des Hochpunkts von g an.

c) Es ist $f'(2) = -\frac{3}{2}$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von g im Punkt $P(1|g(1))$.

(3) Lösen Sie die Gleichung $x - \sqrt{x} = -0{,}25$.

(4) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit von r:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & r+2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6+6r \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 3r-6 \end{array}$$

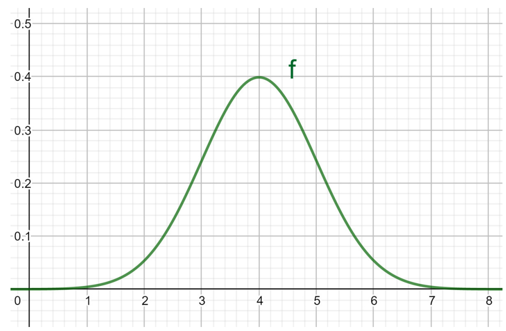
(5) Zeichnen Sie die Ebenen $E : 3x_1 + 4x_2 = 12$ und $F : x_3 = 2$ in ein geeignetes Koordinatensystem. Zeichnen Sie die Schnittgerade ein und geben Sie deren Gleichung an.

(6) Gegeben ist die Dichtefunktion f einer normalverteilten Zufallsgröße X.

a) Geben Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ an.

b) Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

1) $P(X \leq 2) = P(X \geq 6)$;
2) $P(X = 4) \approx 0{,}4$;
3) $P(X \leq 4) = 0{,}5$.

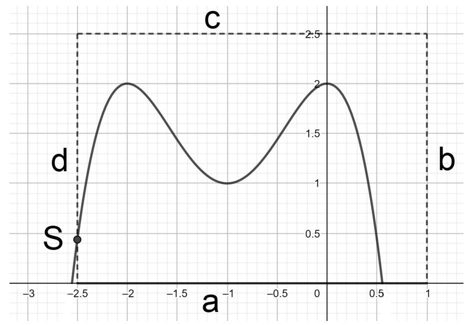


1. Wahlteil Analysis

A.1

Ein Miniroboter wird für einen Wettbewerb programmiert. Er fährt auf einer rechteckigen Platte. Das Rechteck mit den Seiten a, b, c und d in der Abbildung beschreibt diese Platte im Modell. Der Teil des Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = -x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 2,$$



der innerhalb des Rechtecks verläuft, beschreibt die geplante Fahrbahn des Roboters auf der Platte. Der Startpunkt der Fahrt wird durch den Punkt S beschrieben (alle Längeneinheiten in Meter).

a) Die Punkte A und B beschreiben die Stellen, an denen die geplante Fahrbahn den größten Abstand zur Seite a der Platte hat.

   Der Punkt C beschreibt eine weitere Stelle, an der die geplante Fahrbahn parallel zu diesem Rand der Platte verläuft.

   Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte A, B und C.

   Der Graph von f besitzt im Bereich $-2 \leq x \leq -1$ einen Wendepunkt. Interpretieren Sie die Bedeutung dieses Punkts im Sachzusammenhang.

b) Als sich der Roboter an der Stelle befindet, die im Modell durch den Punkt $P(-1{,}5|1{,}4375)$ beschrieben wird, fällt die Steuerung aus. Deshalb fährt der Roboter in seiner momentanen Fahrtrichtung geradeaus weiter.

   Berechnen Sie die Länge der Strecke, die der Roboter noch zurücklegt, bevor er den Rand der Platte erreicht.

Für den Wettbewerb soll ein Bereich der Platte mit Granulat beklebt werden. Dieser Bereich wird im Modell durch die Strecken b, c, d und den Graphen der Funktion h mit

$$h(x) = 0{,}125e^{-0{,}5x} + 1{,}5$$

begrenzt.

c) Weisen Sie nach, dass der Graph von h im Bereich $-2{,}5 \leq x \leq 1$ vollständig innerhalb des Rechtecks verläuft.

Berechnen Sie den Inhalt der mit Granulat beklebten Fläche.

d) Bei einer zweiten Fahrt bleibt der Roboter auf der geplanten Fahrbahn.

Begründen Sie, dass der Roboter mehr als 2,75 m zurückgelegt hat, wenn er die Position erreicht, die im Modell durch den Punkt $Q(-1|1)$ beschrieben wird.

A.2. Für jedes $a > 0$ und $x \geq 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = a \cdot \cos(a\pi \cdot x) + a$. Ihr Graph ist G_a.

a) Begründen Sie, dass $f_a(x) \geq 0$ ist.

b) Der Punkt S_a des Graphen G_a liegt auf der y-Achse. Der Punkt R_a ist derjenige Punkt von G_a auf der x-Achse, welcher dem Ursprung am nächsten liegt. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks OR_aS_a.

c) $x_1 = \frac{1}{2a}$ und $x_2 = \frac{3}{2a}$ sind Wendestellen von G_a.

Bestimmen Sie den Wert für a, für welchen die Tangenten in den zugehörigen Wendepunkten orthogonal zueinander sind.

Wahlteil Geometrie

a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E durch $A(1|0|-4)$, $B(0|-1|1)$ und $C(1|-2|2)$ in Koordinatenform.

Bestimmen Sie denjenigen Punkt auf E, der von $D(7|-1|1)$ den kleinsten Abstand besitzt.

Berechnen Sie den Winkel, den die Ebene E und die x_1x_3-Ebene bilden.

(Teilergebnis: $E:\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -2$)

Gegeben ist nun die Ebenenschar $E_a:\ ax_1 + (a+1)x_2 + x_3 = 4$.

b) Für welches a ist die Ebene E_a parallel zur Ebene E, und für welches a ist sie orthogonal zu E?

c) Zeigen Sie, dass es eine Ebene E_a gibt, bezüglich derer die beiden Punkte $P(1|4|4)$ und $Q(-3|-2|2)$ symmetrisch liegen.

Bestimmen Sie weiter eine Gleichung dieser Ebene E_a.

Geometrie

Für jede Zahl $a > 0$ wird durch die drei Punkte $P(3|0|0)$, $Q(0|6|0)$ und $R_a(0|0|a)$ eine Ebene E_a festgelegt.

a) Stellen Sie die Ebene E_7 in einem geeigneten Koordinatensystem dar.

Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E_7 an.

Berechnen Sie die Weite des Winkels, den E_7 mit der x_3-Achse einschließt.

b) Ermitteln Sie diejenigen Werte von a, für die die Ebenen E_a mit den Koordinatenebenen jeweils eine Pyramide mit dem Rauminhalt 36 Volumeneinheiten einschließen.

c) Die Ebene E_9 ist gegeben durch $E_9: 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 18$.

Bestimmen Sie die Koordinaten derjenigen Punkte der Geraden $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, die von E_9 den Abstand 7 Längeneinheiten haben.

d) Ermitteln Sie einen Wert von a, für den die Ebene E_a mit der x_1x_2-Ebene einen Winkel der Größe $60°$ einschließt.

Geometrie

Die Bewegungen von ferngesteuerten Drohnen, die auf einem Gelände getestet werden, sollen modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben werden. Im Modell beschreibt dabei die x_1x_2-Ebene den Boden des Geländes. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Realität. Die Drohne D_1 fliegt geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit. Im Modell wird die Position der Drohne D_1 zu Beobachtungsbeginn durch den Punkt $P(5|2|3)$ und 5 Sekunden später durch den Punkt $Q(75|12|28)$ dargestellt.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, welche die Flugbahn der Drohne D_1 beschreibt.

Berechnen Sie den Steigungswinkel ihrer Flugbahn gegenüber dem Boden.

Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Drohne eine Flughöhe von 63 m erreicht.

b) Der Punkt $S(90|102|40)$ stellt im Modell die Spitze eines Sendemasts dar. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes im Modell, der die Position beschreibt, in dem die Drohne D_1 den kleinsten Abstand von der Spitze des Sendemasts hat. Berechnen Sie diesen Abstand.

c) Auf dem Gelände fliegen später zwei weitere Drohnen D_2 und D_3 ebenfalls geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit. Die Positionen der Drohnen D_2 und D_3 werden im Modell beschrieben durch

$$d_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 88 \\ -41 \\ 72 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Längenangaben in Meter, Zeit t in Sekunden nach Beobachtungsbeginn).

Bestimmen Sie je einen Wert für a und b, so dass sich die Flugbahnen der beiden Drohnen schneiden.

Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Drohne D_3, bei der die beiden Drohnen kollidieren würden.

Stochastik

Die sechs Seitenflächen eines idealen Würfels sind mit den Zahlen -1, -1, 0, 1, 2, 3 beschriftet.

a) Es wird dreimal gewürfelt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Alle drei gewürfelten Ergebnisse sind kleiner als 0.

B: Die Summe der drei gewürfelten Zahlen beträgt höchstens 7.

C: Sowohl die erste Zahl, als auch das Produkt der beiden anderen Zahlen ist negativ.

b) Ermitteln Sie, wie oft man mindestens würfeln muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80 % mindestens fünfmal die Zahl 0 zu werfen.

c) Der Würfel wird in einem Spiel verwendet. Für einen Einsatz in Höhe von einem Euro darf ein Spieler zweimal würfeln. Falls beide gewürfelten Zahlen größer als 0 sind, erhält der Spieler die Summe der gewürfelten Zahlen in Euro ausbezahlt; andernfalls erhält er keine Auszahlung.

Untersuchen Sie, ob dieses Spiel fair ist.

d) Mithilfe des Würfels wird zufällig eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + bx + c = 0$ gebildet. Dazu wird zweimal gewürfelt. Die erste gewürfelte Zahl wird als Wert von b festgelegt, und die zweite als Wert von c.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Gleichung genau eine Lösung hat.

Lösungen

(1) Es ist

$$\int_2^5 (4-(x-4)^2)\,dx = 4x - \tfrac{1}{3}(x-4)^3\Big|_2^5 = 20 - \tfrac{1}{3} - (8+\tfrac{8}{3}) = 12 - 3 = 9.$$

Die Restfläche ist $25-9=16$, also teilen sich die Flächen im Verhältnis $16:9$.

(2) a) Strecken mit Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung und Spiegelung an der x-Achse.

b) Nullstellen sind $x_1=-1$ und $x_2=2$; Extrempunkte sind ein Tiefpunkt $T(0|-4)$ und ein Hochpunkt $H(2|0)$.

c) Es ist $g'(x)=-2f'(2x)$, also $m=g'(1)=-2f'(2)=3$ und $g(1)=-f(2)=-2$; also ist $y=3x-5$ die Tangentengleichung.

(3) Es ist

$$\begin{aligned}
x-\sqrt{x} &= -0{,}25 && \Big|\ +0{,}25\\
x-\sqrt{x}+0{,}25 &= 0 && \Big|\ \text{bin. Formel}\\
(\sqrt{x}-0{,}5)^2 &= 0 && \Big|\ \sqrt{\ }\\
\sqrt{x}-0{,}5 &= 0 && \Big|\ +0{,}5\\
\sqrt{x} &= 0{,}5 && \Big|\ ^2\\
x &= 0{,}25 = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Probe: $\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}-\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} = -0{,}25.$

Alternativ: Isolieren der Wurzel und Quadrieren

$$
\begin{aligned}
x - \sqrt{x} &= -0{,}25 && \Big|\ -x \\
-\sqrt{x} &= -x - 0{,}25 && \Big|\ \cdot(-1) \\
\sqrt{x} &= x + 0{,}25 && \Big|\ ^2 \\
x &= x^2 + 0{,}5x + 0{,}0625 && \Big|\ -x \\
x^2 - 0{,}5x + 0{,}0625 &= 0 && \Big|\ \text{bin. Formel} \\
(x - 0{,}25)^2 &= 0 && \Big|\ \sqrt{} \\
x - 0{,}25 &= 0 && \Big|\ +0{,}25 \\
x &= 0{,}25 = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

(4) LGS: Mit Kreuzprodukt:

$$x_1\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r+2\\6+6r\\3r-6\end{pmatrix}.$$

Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\-7\\-2\end{pmatrix}.$$

$$
\begin{aligned}
x_1\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}r+2\\6+6r\\3r-6\end{pmatrix} \quad \Bigg| \cdot \begin{pmatrix}15\\-7\\-2\end{pmatrix} \\
x_1(30 - 7 - 12) &= 15(r+2) - 7(6+6r) - 2(3r-6) \\
11x_1 &= -33r
\end{aligned}
$$

Kontrolle: $x_2(15 - 21 + 6) = 0$ und $x_3(15 - 7 - 8) = 0$.

Also ist $x_1 = -3r$. Einsetzen liefert

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
-6r & + & x_2 & + & x_3 & = & r+2 \\
-3r & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6+6r \\
-18r & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 3r-6
\end{array}
$$

Addition der zweiten und dritten Gleichung liefert

$$-21r + 5x_3 = 9r,$$

also $x_3 = 6r$. Einsetzen ergibt dann $x_2 = r + 2$.

(5) Spurpunkte von E sind $S_1(4|0|0)$ und $S_2(0|3|0)$; E ist parallel zur x_3-Achse.

Spurpunkt von F ist $S_3(0|0|2)$; F ist parallel zur x_1x_2-Ebene.

Alle gemeinsamen Punkte haben $x_3 = 2$; Schnittpunkt in der x_1x_3-Ebene ist $(4|0|2)$, Schnittpunkt in der x_2x_3-Ebene $(0|3|2)$. Also ist die Schnittgerade gegeben durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(6) a) $\mu = 4$ (Erwartungswert bei Normalverteilung: Symmetrieachse, buw. Maximum) und $\sigma \approx 1$ (Abstand Wendepunkte zur Symmetrieachse).

b) 1) Ist richtig wegen der Achsensymmetrie bezüglich $x = 4$.
2) ist falsch wegen $P(X = 4) = 0$.
3) ist richtig wegen der Achsensymmetrie bezüglich $x = 4$.

A.1. a) Es sind die lokalen Hochpunkte A, B und der lokale Tiefpunkt C zu berechnen. Ableitungen:

$$f'(x) = -4x^3 - 12x^2 - 8x$$
$$f''(x) = -12x^2 - 24x - 8$$

$f'(x) = 0$ führt auf

$$-4x(x^2 + 3x + 2) = 0.$$

Satz vom Nullprodukt und Satz von Vieta ergeben $x_1 = -2$, $x_2 = -1$ und $x_3 = 0$.

- $y_1 = f(-2) = 2$, $f''(-2) = -8 < 0$, also $H_1(-2|2)$.
- $y_2 = f(-1) = 1$, $f''(-1) = +4 > 0$, also $T(-1|1)$.
- $y_3 = f(0) = 2$, $f''(0) = -8 < 0$, also $H_2(0|2)$.

Im Wendepunkt fährt der Roboter gerade aus (keine Links- oder Rechtskurve).

b) Tangente in $x = -1{,}5$ ist $y = -1{,}5x - 0{,}8125$. Schnittpunkt mit x-Achse (Seite a) ergibt $x_1 = -\frac{13}{24} \approx -0{,}542$.

Zurückgelegter Weg: $s = \sqrt{0{,}958^2 + 1{,}4375^2} \approx 1{,}73$; der Roboter legt also etwa 1,73 m zurück.

c) Der Funktionswert $h(-2{,}5) \approx 1{,}94$ liegt zwischen 0 und 2,5, also schneidet der Graph von h die Seite d.

Der Funktionswert $h(1) \approx 1{,}58$ liegt ebenfalls zwischen 0 und 2,5, also schneidet der Graph von h die Seite b. Weil h monoton fällt, liegt der Graph von h innerhalb des Rechtecks.

Die Fläche beträgt

$$F = \int_{-2{,}5}^{1} (2{,}5 - h(x))\,dx = \int_{-2{,}5}^{1} (1 - 0{,}125e^{-0{,}5x})\,dx = x + 0{,}25e^{-0{,}5x}\Big|_{-2{,}5}^{1} \approx 2{,}78.$$

d) Von $S(-2{,}5|0{,}5)$ bis zum Hochpunkt $H_1(-2|2)$ fährt er mindestens 1,5 m (Differenz der y-Koordinaten); der Abstand H_1S ist $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} > 1{,}4$; also hat er mindestens 2,9 m zurückgelegt.

A.2. $f_a(x) = a \cdot \cos(a\pi \cdot x) + a$. Ihr Graph ist G_a.

a) Die Funktion $g(x) = \cos(tx)$ nimmt nur Werte zwischen -1 und -1 an, die Funktion $h(x) = a\cos(tx)$ also nur Werte zwischen $-a$ und a. Verschiebt man das Schaubild um a nach oben, bleiben nur Werte zwischen 0 und $2a$.

Alternativ: $a\cos(a\pi x) \geq -a$, also $f_a(x) \geq 0$.

b) Es ist $S_a(0|2a)$ und $R_a(0|\frac{1}{a})$. Also hat das Dreieck Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$.

c) Es ist $f_a'(x) = -\pi a^2 \sin(a\pi x)$, also

$$\begin{aligned} m_1 &= f_a'(x_1) = -\pi a^2 \sin\tfrac{\pi}{2} = -\pi a^2 \\ m_2 &= f_a'(x_2) = -\pi a^2 \sin\tfrac{3\pi}{2} = \pi a^2. \end{aligned}$$

Also stehen die Tangenten senkrecht, wenn $m_1 m_2 = -\pi^2 a^4 = -1$ gilt, wenn also $a = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ist (beachte $a > 0$).