K2 MATHEMATIK KLAUSUR 3

16.04.2021

Aufgabe	PT	Ana	Geo	Sto	Gesamtpunktzahl
Punkte (max)	20	20	10	10	60
Punkte					
Notenpunkte					

PT	1	2	3	4	5	6	Summe
P. (max)	2	3	4	3	5	3	20
Punkte							

WT Ana	A.1 a)	b)	c)	d)	e)	A 1.2	Summe
P. (max)	5	3	2	4	2	4	20
Punkte							

WT Geo	a)	b)	c)	d)	Summe
P. (max)	3	2	2	3	10
Punkte					

WT Sto	a)	b)	c), d)	Summe
P. (max)	3	3	4	10
Punkte				

WTR und Merkhilfe dürfen erst nach Abgabe des Pflichtteils abgeholt werden.

Pflichtteil

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = (2x-1)^2 \cdot e^{1-x}.$$

(2) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$ und die Tangente $g:\ y = 4x - 4$ an das Schaubild von f im Punkt $P(2|4)$. Die Schaubilder von f und g, sowie die x-Achse begrenzen ein Flächenstück. (siehe Abb. 1 links). Bestimmen Sie dessen Inhalt.

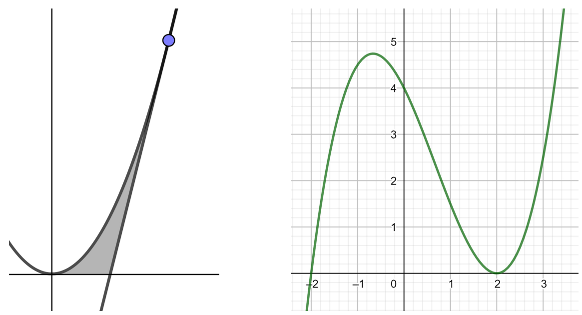


Abbildung 1. Funktion f, Aufg. 2 bzw. Aufg. 3

(3) Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f (siehe Abb. 1 rechts). Weiter ist $g(x) = x \cdot f(x)$.

a) Geben Sie alle Nullstellen von g an.

b) Zeigen Sie, dass g in $x = 2$ einen Tiefpunkt besitzt.

(4) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit von r:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -2r+7 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4r-3 \\ 5x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 3r+8 \end{array}$$

(5) Gegeben sind die Gerade g durch $A(-1|1|4)$ und $B(3|-1|8)$, sowie die Ebene $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$.

a) Zeigen Sie, dass sich g und E orthogonal in A schneiden.

b) Zeigen Sie, dass $C(1|-3|0)$ in E liegt und berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

(6) Kim und Ricky spielen gegeneinander Tennis. Im Schnitt gewinnt Kim 70 % der Spiele. Ein Unentschieden ist nicht möglich. Sie spielen zweimal gegeneinander.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Spiele von derselben Person gewonnen werden.

b) Der eine Spieler möge mit Wahrscheinlichkeit p gewinnen. Stellen Sie einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit auf, dass einer beide Spiele gewinnt, und bestimmen Sie p so, dass diese Wahrscheinlichkeit minimal wird.

1. Analysis

1.1. **A.1.** Die kanadische Wasserpest ist eine krautartige Wasserpflanze. Die Wachstumsgeschwindigkeit einer solchen Pflanze (in cm/Tag) soll näherungsweise durch die Funktion w mit

$$w(t) = \frac{1}{1350}t^3 - \frac{1}{15}t^2 + \frac{3}{2}t$$

für $0 \leq t \leq 45$ beschrieben werden, wobei t die Zeit in Tagen nach Beobachtungsbeginn angibt.

a) Berechnen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit nach 10 Tagen.

Bestimmen Sie die Zeitpunkte, an denen die Pflanze nicht wächst.

Berechnen Sie die maximale Wachstumsgeschwindigkeit.

b) Rechnen Sie nach, dass

$$\frac{1}{45-15}\int_{15}^{45} w(t)\,dt = w(30)$$

gilt, und erläutern Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang.

c) Alternativ kann die Wachstumsgeschwindigkeit einer solchen Pflanze (in cm/Tag) durch eine Exponentialfunktion v mit

$$v(t) = a \cdot t \cdot e^{-bt} \quad (a, b > 0)$$

für $0 \leq t \leq 45$ beschrieben werden, wobei t die Zeit in Tagen nach Beobachtungsbeginn angibt.

Zeigen Sie, dass

$$V(t) = -\left(\frac{a}{b} \cdot t + \frac{a}{b^2}\right)e^{-bt}$$

eine Stammfunktion von v ist.

d) Erläutern Sie die Bedeutung der Zeilen (I) und (II) im unten stehenden Kasten für das Wachstumsverhalten der Pflanze.

$$\boxed{\begin{array}{rl} & v(t) = a \cdot t \cdot e^{-bt} \quad (a, b > 0) \\ \text{(I)} & v(15) = 10 \\ \text{(II)} & v'(15) = 0 \quad \text{und} \quad v''(15) < 0. \end{array}}$$

Bestimmen Sie a und b so, dass die Gleichungen (I) und (II) erfüllt sind.

e) Sei nun $a = \frac{2e}{3}$ und $b = \frac{1}{15}$ für die Funktion v.

Geben Sie einen integralfreien Term für die Länge einer Pflanze, die bei Beobachtungsbeginn 10 cm lang ist und Wachstumsgeschwindigkeit v hat, nach t Tagen.

A.2. Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = -x^4 + 0{,}5kx^2$ mit $k > 0$.

a) Weisen Sie nach, dass f_k an der Stelle $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{k}$ ein Maximum hat.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ortskurve aller Hochpunkte von f_k.

Geometrie

In einem dreidimensionalen Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene eine flache Landschaft. Eine Einheit entspricht dabei einem Kilometer. Ein Sportflugzeug befindet sich im Punkt $P(-9|25|2)$ und fliegt geradlinig in Richtung des Punktes $Q(-1|9|2)$ auf eine Nebelwand zu. Für die Strecke $\overline{PQ}$ benötigt es genau sechs Minuten. Die dem Flugzeug zugewandte Begrenzungsebene E der Nebelwand enthält die Punkte $A(1|3|1)$, $B(5|2|0)$ und $C(3|0|3)$.

a) Begründen Sie, dass $\vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 25 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Parametergleichung der Geraden g ist, in der die Flugroute liegt.

Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Flugzeuges auf dem Weg von P nach Q in km/h.

b) Bestimmen Sie für die Ebene E eine Gleichung in Koordinatenform.

[Eine mögliche Koordinatengleichung von E ist $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9$.]

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S, in dem das Flugzeug bei gleichbleibender Flugrichtung die dem Flugzeug zugewandte Begrenzungsebene der Nebelwand durchstoßen würde.

d) Aufgrund des Nebels ändert der Pilot rechtzeitig seine Flugroute und fliegt in gleichbleibender Höhe parallel zur Ebene E weiter.

Erläutern Sie, warum $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein möglicher Richtungsvektor der Geraden ist, die die neue Flugroute enthält.

Berechnen Sie den Winkel, um den die neue Flugroute in Richtung des Vektors $\vec{u}$ gegenüber der alten Flugroute abweicht.

Stochastik

Bitte lösen Sie **entweder** a), b) und c) **oder** a), b) und d).

Ein Unternehmen stellt Kakaopulver her.

Zur Überprüfung seiner Abfüllmaschine untersucht das Unternehmen 500 Packungen, die von dieser Maschine abgefüllt wurden. Ein zu geringes Füllgewicht ist gegeben, wenn dieses mehr als 5 g unter dem Erwartungswert von 125 gliegt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung ein Füllgewicht von höchstens 120 g besitzt, ist $p = 0{,}01$.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A. mehr als 5 Packungen besitzen ein Füllgewicht von höchstens 120 g;

B. mindestens 3 und höchstens 6 Packungen besitzen ein Füllgewicht von höchstens 120 g.

b) Ein Großhändler erhält 10 Lieferungen mit jeweils 500 Packungen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei höchstens einer dieser Lieferungen mehr als 2 % der Packungen ein Füllgewicht von höchstens 120 g haben.

c) Der Hersteller will eine neue Abfüllmaschine testen. Dazu wiegt er 800 Packungen; er will wissen, ob die Wahrscheinlichkeit, dass das Füllgewicht unter 120 g liegt, sich gegenüber der alten Maschnine verändert hat, und macht einen zweiseitigen Hypothesentest mit der Nullhypothese $H_0 : p = 0{,}01$ auf einem Signifikanzniveau von 5 %.

Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich und den Fehler erster Art.

d) Die Zufallsgröße X beschreibt das Füllgewicht der Packungen in Gramm (g) und wird als normalverteilt angenommen. Der Erwartungswert des Füllgewichts beträgt 125 g. Die Standardabweichung hat den Wert 2 g.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Füllgewicht einer beliebigen Packung

- zwischen 124,5 g und 125,4 g liegt,
- über 127,0 g liegt,

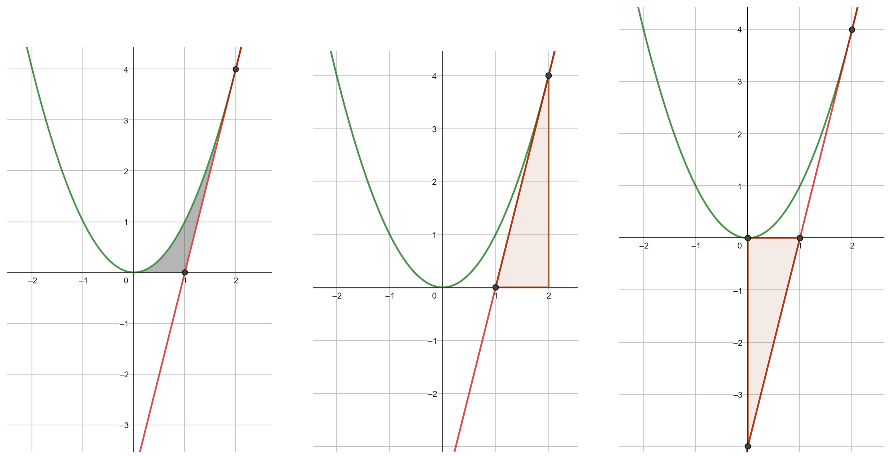
Bestimmen Sie das größte Gewicht (auf 0,1 g genau), das mindestens 95 % der Packungen überschreiten.

Lösungen Pflichtteil

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion f mit
$$f(x) = (2x-1)^2 \cdot e^{1-x}.$$

Es ist
$$f'(x) = 4(2x-1) \cdot e^{1-x} - (2x-1)^2 \cdot e^{1-x}.$$

(2) Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse: $x = 1$.



Fläche unter dem Schaubild von f abzüglich des rechtwinkligen Dreiecks unterhalb der Tangente:
$$F = \int_0^2 x^2\,dx - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}.$$
Oder Fläche zwischen den Schaubildern abzüglich des rechtwinkligen Dreiecks

Oder Fläche unter f plus Fläche zwischen den Schaubildern:
$$\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (f(x) - g(x))\,dx = \frac{2}{3}.$$

(3) Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f. Weiter ist $g(x) = x \cdot f(x)$.

a) Nullstellen von $g(x) = x \cdot f(x)$ mit dem Satz vom Nullprodukt: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$ (doppelt)

b) Wir müssen $g'(2) = 0$ und $g''(2) > 0$ zeigen. Es ist $g'(2) = f(2) + 2f'(2) = 0$; weiter gilt $g''(x) = f'(x) + f'(x) + xf''(x)$, also $g''(2) = 2f'(2) + 2f''(2) = 2f''(2)$. Wegen $f''(2) > 0$ (denn f hat in $x = 2$ einen Tiefpunkt) ist also auch $g''(2) > 0$.

Alternativ: Bestimmung der Funktionsgleichung von $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Wenn man von den Punkten $(-2|0)$, $(0|4)$ und dem Tiefpunkt $T(2|0)$ ausgeht, kann man f mit viel Mühe bestimmen. Leichter geht es, wenn man den Ansatz $f(x) = a(x+2)(x-2)^2$ macht (einfache Nullstelle in $x = -2$, doppelte Nullstelle in $x = 2$). Einsetzen von $(0|4)$ liefert sofort $a = \frac{1}{2}$, also

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-2)^2.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2}x(x+2)(x-2)^2 = \frac{1}{2}(x^2+2x)(x-2)^2, \\ g'(x) &= (x+2)(x-2)^2 + (x^2+2x)(x-2), \\ g''(x) &= (x-2)^2 + 2(x+2)(x-2) + (2x+2)(x-2) + (x^2+2x). \end{aligned}$$

Folglich gilt $g'(2) = 0$ und $g''(2) = 8 > 0$.

(4) Mit Kreuzprodukt:

$$x_1\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2r+7\\4r-3\\3r+8\end{pmatrix}.$$

Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$$

$$x_1\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2r+7\\4r-3\\3r+8\end{pmatrix} \quad \Bigg| \cdot \begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$$

$$21x_1 = 21r$$

Also ist $x_1 = r$. Einsetzen liefert

$$\begin{array}{rcrcrcl} r & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -2r+7 \\ 3r & + & x_2 & - & x_3 & = & 4r-3 \\ 5r & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 3r+8 \end{array}$$

I $+2\cdot$ II ergibt $7r - x_2 = 6r + 1$, also $x_2 = r - 1$ und dann $x_3 = 2$.

(5) a) A liegt in E wegen $-2 - 1 + 8 = 5$.

Gerade $g:\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix}$.

Richtungsvektor $\begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix} = 2\vec{n}$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

b) Punktprobe: $2 + 3 = 5$.

$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix} & |\overrightarrow{AB}| = 6 \\ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-8\end{pmatrix} & |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{72} \\ \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix} & |\overrightarrow{CA}| = 6. \end{array}$$

Wegen $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ ist das Dreieck rechtwinklig in A. Der Flächeninhalt ist damit $F = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$.

(6) a) $p(KK) + p(RR) = 0{,}7^2 + 0{,}3^2 = 0{,}58$.

b) Der eine Spieler möge mit Wahrscheinlichkeit p gewinnen. Stellen Sie einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit auf, dass einer beide Spiele gewinnt, und bestimmen Sie p so, dass diese Wahrscheinlichkeit minimal wird.

Es ist $f(p) = p(KK) + p(RR) = p^2 + (1-p)^2$; $f'(p) = 2p - 2(1-p) = 4p - 2 = 0$ ergibt $p = \frac{1}{2}$.

Analysis A.1

Die kanadische Wasserpest ist eine krautartige Wasserpflanze. Die Wachstumsgeschwindigkeit einer solchen Pflanze (in cm/Tag) soll näherungsweise durch die Funktion w mit

$$w(t) = \frac{1}{1350}t^3 - \frac{1}{15}t^2 + \frac{3}{2}t$$

für $0 \leq t \leq 45$ beschrieben werden, wobei t die Zeit in Tagen nach Beobachtungsbeginn angibt.

a) $w(10) \approx 9{,}1$: Die Wachstumtsgeschwindigkeit beträgt 9,1 cm/Tag.

$w(t) = 0$ setzen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1350}t^3 - \frac{1}{15}t^2 + \frac{3}{2}t &= 0 && \Big| \cdot 1350 \\ t^3 - 90t^2 + 2025t &= 0 \\ t(t-45)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Also wächst die Pflanze zu Beobachtungsbeginn und nach 45 Tagen nicht.

Maximale Wachstumsgeschwindigkeit: $w'(t) = 0$ ergibt

$$\frac{1}{450}t^2 - \frac{2}{15}t + \frac{3}{2} = 0,$$

also $t^2 - 60t + 675 = 0$. Dies liefert $t_1 = 15$ und $t_2 = 45$. Wegen $w(45) = 0$ und $w(15) = 10$ ist die maximale Wachstumsgeschwindigkeit 10 cm/Tag.

b) Es ist

$$\frac{1}{45-15}\int_{15}^{45} w(t)\,dt = \frac{1}{30}\left[\frac{1}{5400}t^4 - \frac{1}{45}t^3 + \frac{3}{4}t^2\right]_{15}^{45} = 5.$$

Wegen $w(30) = 5$ ist die Behauptung gezeigt.

Die linke Seite der Gleichung gibt die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit im Zeitraum zwischen 15 und 45 Tagen an, die rechte die Wachstumsgeschwindigkeit nach 30 Tagen.

c) Wir finden

$$\begin{aligned} V'(t) &= -\frac{a}{b} \cdot e^{-bt} + b\left(\frac{a}{b} \cdot t + \frac{a}{b^2}\right)e^{-bt} \\ &= -\frac{a}{b} \cdot e^{-bt} + \left(at + \frac{a}{b}\right)e^{-bt} \\ &= ate^{-bt} = v(t). \end{aligned}$$

d) $v(15) = 10$: die momentane Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze 15 Tage nach Beobachtungsbeginn beträgt 10 cm/Tag.

$v'(15) = 0$ und $v''(15) < 0$ bedeutet, dass die Wachstumsgeschwindigkeit nach 15 Tagen maximal ist.

Ableitung: $v'(t) = (a - abt)e^{-bt}$. Also muss

$$15ae^{-15b} = 10$$
$$(a - 15ab)e^{-15b} = 0$$

gelten. Satz vom Nullprodukt und $e^{-15b} \neq 0$ ergibt $a = 15ab$, also $b = \frac{1}{15}$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert $a = \frac{2e}{3}$.

e) Sei nun $a = \frac{2e}{3}$ und $b = \frac{1}{15}$ für die Funktion v.

Es ist

$$V(t) = -(10et + 150e)e^{-t/15} + c.$$

Aus $V(0) = 10$ folgt $-150e + c = 10$, also $c = 10 + 150e \approx 418$.

A.2. Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = -x^4 + 0{,}5kx^2$ mit $k > 0$.

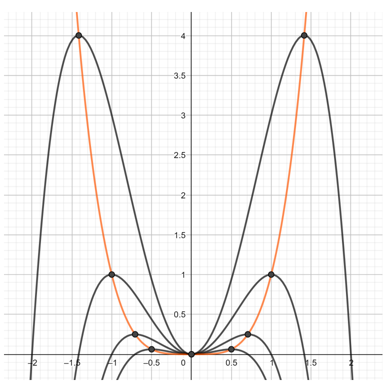
a) Ableitungen:

$$f_k'(x) = -4x^3 + kx = x(-4x^2 + k)$$
$$f_k''(x) = -12x^2 + k$$

Es ist $f_k'(x_1) = \frac{1}{2}\sqrt{k}(-4 \cdot \frac{k}{4} + k) = 0$, sowie $f_k''(x_1) = -12 \cdot \frac{k}{4} + k = -2k < 0$.

b) Es ist $f_k(x_1) = -\frac{k^2}{16} + 0{,}5k\frac{k}{4} = \frac{k^2}{16}$, also $H_k(\frac{1}{2}\sqrt{k}|\frac{k^2}{16})$.

Aus $x = \frac{1}{2}\sqrt{k}$ folgt $k = (2x)^2 = 4x^2$; Einsetzen in $y = \frac{k^2}{16}$ ergibt die Gleichung $y = x^4$ der Ortskurve der Hochpunkte.



Geometrie

a) Für $t = 0$ erhält man $P(-9|25|2)$, für $t = 8$ den Punkt $Q(-1|9|2)$.

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{8^2 + 16^2} \approx 17{,}9$. Die Geschwindigkeit beträgt also $\frac{17{,}9}{6} \approx 3$ km/min und damit 180 km/h.

b) Es ist

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix} = -5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist $E : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = d$. Einsetzen von A ergibt $d = 9$.

c) Schnittpunkt von Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 25 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit der Ebene; Schneiden ergibt $r = 12$ und $S(3|1|2)$.

d) Die x_3-Koordinate des Richtungsvektors ist 0, Richtungsvektor steht senkrecht auf Normalenvektor.

$\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha \approx 36{,}9°$

Stochastik

X sei die Anzahl der Packungen mit einem Füllgewicht von höchstens 120 g; X ist binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = 0{,}01$.

A. $P(X > 5) = P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx 0{,}384$;

B. $P(3 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 2) \approx 0{,}64$.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 2% einer Packung ein Füllgewicht von höchstens 120 g haben, beträgt

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) \approx 0{,}013.$$

Sei Y die Anzahl der Lieferungen, bei denen mehr als 2% einer Packung ein Füllgewicht von höchstens 120 g haben. Y ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}013$; also ist

$$P(Y \leq 1) \approx 0{,}993.$$

c) Sei X die Anzahl der Packungen mit einem Füllgewicht unter 120 g. X ist binomialverteilt mit $n = 800$ und $p = 0{,}01$. Der Ansatz für den Ablehnungsbereich ist

$$p(X \leq k) \leq 0{,}025 \quad \text{und} \quad p(X \geq k') \leq 0{,}25.$$

Wir finden

k	$p(X \leq k)$
2	0,0134
3	0,042

k'	$p(X \geq k')$
14	0,0334
15	0,0168

Die Nullhypothese wird also abgelehnt, wenn bei höchstens 2 oder mindestens 15 Packungen Füllgewicht unter 125 g liegt.

Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt $p = 0{,}0134 + 0{,}0168 = 0{,}0302$.

d) Wir finden

- $P(124{,}5 \leq X \leq 125{,}4) \approx 0{,}178$;
- $P(X \geq 127{,}0) \approx 0{,}158$.

Es soll $P(X \geq k) = 0{,}95$ sein; Probieren liefert

k	$p(X \geq k)$
121,7	0,951
121,7	0,945