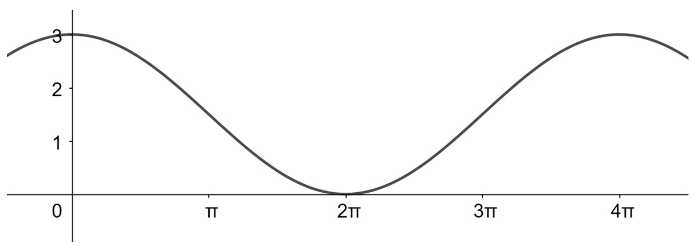
K2 MATHEMATIK KLAUSUR 2

20.01.2021

(1) Bestimmen Sie alle Stellen, an denen die Funktion
$$f(x) = (x^2 + x)^3$$
eine waagrechte Tangente besitzt.

(2) Bestimmen Sie einen zum folgenden Schaubild gehörigen Funktionsterm:



(3) Lösen Sie die Gleichung
$$\frac{e^x + 2}{e^{-x}} = 3$$

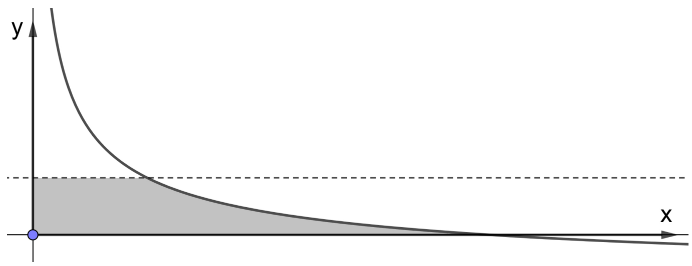
(4) Bestimmen Sie alle Asymptoten der Funktion f mit
$$f(x) = \frac{3x}{x^2 - 4} - 1.$$
Berechnen Sie weiter die Nullstellen von f.

(5) Zeigen Sie, dass die Funktion f mit $f(x) = (x-1) \cdot e^x + 1$ die x-Achse im Ursprung berührt.

(6) Sei

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}.$$

Die Gerade $y = \frac{1}{2}$, das Schaubild von f und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche. Bestimmen Sie deren Inhalt.



Die Tangente an das Schaubild im Punkt $P(a|f(a))$ begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Bestimmen Sie a so, dass das Dreieck gleichschenklig wird.

(7) Gegeben ist eine Funktionenschar

$$f_t(x) = x \cdot e^{2-tx}$$

für $t > 0$. Die Ableitungen von f_t lauten

$$f_t'(x) = (1 - tx)e^{2-tx}$$
$$f_t''(x) = (t^2x - 2t)e^{2-tx}$$

a) Berechnen Sie Extrem- und Wendepunkte von f_1.

b) zeigen Sie, dass die Tangente an das Schaubild von f_1 im Ursprung durch den Punkt $P(1|e^2)$ verläuft.

c) Zeigen Sie, dass die Schaubilder aller Funktionen f_t durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

d) Zeigen Sie, dass die Wendepunkte W_t der Funktionen f_t alle auf einer Geraden liegen.

e) Bestimmen Sie a und b so, dass

$$F_t(x) = (ax + b)e^{2-tx}$$

eine Stammfunktion von f_t ist.

(8) Die Funktion h mit

$$h(x) = 2x^3 - 18x^2 + 30x, \qquad 0 \leq x \leq 7,$$

beschreibt näherungsweise das Höhenprofil eines Straßenradrennens. Dabei gibt x die in horizontaler Richtung zurückgelegte Strecke in Kilometern und $h(x)$ die Höhe in Metern an.

a) Ermitteln Sie diejenigen Stellen des Profils, an denen dieselbe Höhe wie zu Beginn des Rennens erreicht wird.

Berechnen Sie den maximalen Höhenunterschied des Profils.

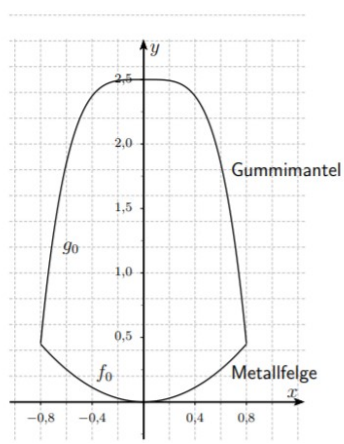
Bestimmen Sie die größte Steigung der Straße und geben Sie diese in Prozent an.

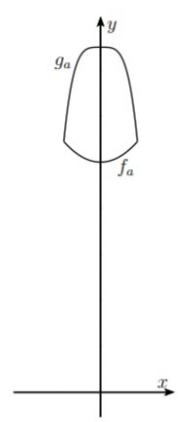
Skizzieren Sie den Graphen von h in einem geeigneten Koordinatensystem.

b) Für jedes $a \geq 0$ werde die Querschnittsfläche Q_a eines Fahrradreifens R_a durch die Funktionen f_a und g_a beschrieben. Dabei beschreibt f_a die Metallfelge und g_a den Gummimantel. Eine Längeneinheit entspricht einem Zentimeter.

$$f_a(x) = 0{,}7x^2 + a, \quad g_a(x) = -5x^4 + a + 2{,}496.$$

Die folgenden Abbildungen zeigen die Graphen von f_0 und g_0 sowie von f_a und g_a zwischen ihren jeweiligen Schnittstellen.





Berechnen Sie die maximale Breite des Reifens R_0.

Bestimmen Sie den Winkel, unter dem Metallfelge und Gummimantel beim Reifen R_0 aufeinander treffen.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt von Q_0. Begründen Sie, warum der Flächeninhalt von Q_a unabhängig von a ist.

c) Ein Modell des Reifens R_{30} entsteht durch Rotation von Q_{30} um die x-Achse.

Berechnen Sie das Volumen des Reifens R_{30}.

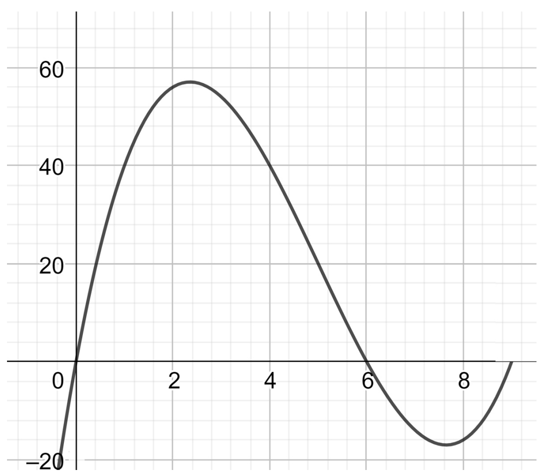
Der Inhalt der Querschnittsfläche Q_a ist unabhängig von a. Erklären Sie, warum das Volumen des Reifens R_a dennoch von a abhängig ist.

d) Gegeben ist der Punkt $A(0{,}4|2{,}368)$ auf dem Graphen von g_0. Bestimmen Sie den Punkt $B(x|f_0(x))$ auf dem Graphen von f_0 im Intervall $[-0{,}8; 0{,}8]$, für den die Länge der Strecke $\overline{AB}$ maximal ist.

Geben Sie einen Ansatz an und beschreiben Sie das weitere Vorgehen.

(9) Die Funktion v mit $v(t) = t^3 - 15t^2 + 54t$ ordnet jedem Zeitpunkt t mit $0 \leq t \leq 9$ (in Minuten) die Höhenänderungsrate eines Heißluftballons (also die Steig-/Fallgeschwindigkeit) in m/min zu.

a) Untersuchen Sie den Graphen von v im Intervall $[0; 9]$ auf Nullstellen und lokale Extrema.



b) Der Graph von v schließt mit der t-Achse im betrachteten Intervall zwei Teilflächen ein.

Berechnen Sie die Inhalte der beiden Flächen und geben Sie deren Bedeutung im Sachzusammenhang an.

c) Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der Ballon in einer Fahrthöhe von 100 Metern. Die Funktion h beschreibe die Höhe des Ballons (in Metern) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Minuten).

Bestimmen Sie einen Funktionsterm für h.

Zeigen Sie, dass der Graph von h zwei Wendestellen aufweist. Geben Sie die Bedeutung dieser Wendestellen im Sachzusammenhang an.

d) Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem der Ballon seine geringste Höhe hat. Geben Sie auch diese geringste Höhe an.

Lösungen

(1) $f'(x) = 3(2x+1)(x^2+x)^2 = 0$ ergibt $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$.

(2) $f(x) = \frac{3}{2}\cos(\frac{x}{2}) + \frac{3}{2}$.

Hier gibt es im Wesentlichen zwei Methoden, ans Ziel zu gelangen.

a) Die Funktion beginnt im Hochpunkt; wir benutzen also eine Kosinusfunktion. Betrachten wir das Schaubild als Schwingung um eine Ruhelage, dann liegt diese bei $y = 1{,}5$. Das Schaubild der Kosinusfunktion ist also um 1,5 nach oben verschoben. Die Amplitude (die maximale Abweichung von der Ruhelage) ist ebenfalls 1,5, folglich müssen wir die Kosinusfunktion mit 1,5 (oder mit $-1{,}5$; aber in diesem Fall würde das Schaubild in einem Tiefpunkt beginnen) multiplizieren. Die Periode (Abstand zweier benachbarter Hochpunkte) beträgt 4π; damit ist

$$f(x) = 1{,}5\cos(\tfrac{x}{2}) + 1{,}5,$$

denn wenn man jetzt $x = 4\pi$ einsetzt, erhält man $f(4\pi) = 1{,}5\cos(2\pi) + 1{,}5 = 3$.

b) Weil die Kosinusfunktion nicht nach rechts oder links verschoben ist, gilt

$$f(x) = a\cos(bx) + d.$$

(Ganz allgemein wäre $f(x) = a\cos(b(x+c)) + d$.)

Um die drei Konstanten zu bestimmen, müssen wir drei Punkte einsetzen (es reicht nicht, drei verschiedene Hochpunkte oder drei verschiedene Nullstellen einzusetzen - die liefern immer dieselben Gleichungen).

$$\begin{array}{ll} H(0|3) & 3 = a\cos(0) + d = a + d \\ H(4\pi|3) & 3 = a\cos(4\pi b) + d \\ T(2\pi|0) & 0 = a\cos(2\pi b) + d \end{array}$$

Subtrahieren wir die ersten beiden Gleichungen voneinander, erhalten wir

$$0 = a\cos(4\pi b) - a = a(\cos(4\pi b) - 1).$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt ist entweder $a = 0$ (das kann aber nicht sein, sonst wäre $f(x) = d$ konstant) oder $\cos(4\pi b) = 1$. Letzteres gilt für $b = 0$ (aber das kann nicht sein, sonst wäre f wieder konstant wegen $f(x) = a\cos(bx) + d = a\cos(0) + d = a + d$) und für $b = \frac{1}{2}$. Wir versuchen also $b = \frac{1}{2}$.

Setzen wir das in die dritte Gleichung ein, erhalten wir

$$0 = a\cos(\pi) + d = d - a.$$

Aus $a + d = 3$ und $d - a = 0$ folgt aber $a = d = \frac{3}{2}$. Damit folgt wie oben $f(x) = 1{,}5\cos(\frac{x}{2}) + 1{,}5$.

(3) Man findet

$$\begin{aligned}\frac{e^x+2}{e^{-x}} &= 3 \\ e^{2x}+2e^x &= 3 && \Big|\ -3 \\ e^{2x}+2e^x-3 &= 0 \\ (e^x+3)(e^x-1) &= 0\end{aligned}$$

also $x_1 = 0$.

(4) Senkrechte Asymptoten (Nenner gleich 0 setzen) $x = -2$, $x = +2$; waagrechte Asymptote $y = -1$, denn es ist

$$\frac{3x}{x^2-4} - 1 = \frac{3x \cdot \frac{1}{x^2}}{(x^2-4)\cdot\frac{1}{x^2}} - 1 = \frac{\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} - 1.$$

Weil $\frac{3}{x} \to 0$ und $\frac{4}{x^2} \to 0$ für $x \to \pm\infty$ gilt $f(x) \to \frac{0}{1} - 1 = -1$, also ist $y = -1$ waagrechte Asymptote.

Nullstellen: $3x = x^2 - 4$ liefert $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1) = 0$, also $x_1 = -1$ und $x_2 = 4$.

(5) Das Schaubild einer Funktion berührt die x-Achse in $x = u$, wenn $f(u) = 0$ (Nullstelle) und $f'(u) = 0$ (waagrechte Tangente) gilt. Damit der Berührpunkt im Ursprung liegt, müssen wir also $f(0) = f'(0) = 0$ nachrechnen. $f(0) = 0$ ist klar; wegen $f'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$ folgt auch $f'(0) = 0$.

(6) Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen müssen wir die Schnittpunkte von f mit der x-Achse $y = 0$ und der Geraden $y = \frac{1}{2}$ berechnen.

Nullstelle: $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} &= 0 && \Big|\ +\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} &= \frac{1}{2} && \Big|\ ^2 \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Also $x_1 = 4$.

Schnittpunkt mit Gerade: $f(x) = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} && \Big|\ +\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} &= 1 && \Big|\ ^2 \\ \frac{1}{x} &= 1\end{aligned}$$

Also $x_2 = 1$.

Fläche:

$$\int_1^4 \Big(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\Big)\,dx = 2\sqrt{x} - \frac{x}{2}\Big|_1^4 = 4 - 2 - \Big(2 - \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2},$$

also

$$A = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Dreieck: Damit das Dreieck gleichschenklig wird, müssen die Winkel an der Hypotenuse beide $= 45^\circ$ sein, die Tangente also Steigung $m = -1$ haben. Also ist $f'(x) = -1$ zu lösen.

Aus $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} = -1$ folgt $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Zweite Möglichkeit: Tangente in beliebigem Punkt $P(a|f(a))$.

(7) a) Wir müssen f' bzw. f'' gleich 0 setzen. Der Satz vom Nullprodukt und die Tatsache, dass die e-Funktion nicht 0 werden kann, liefert dann, dass die Klammer verschwinden muss.

Extrempunkt: $1 - tx = 0$ ergibt $x_1 = \frac{1}{t}$; damit ist $f(\frac{1}{t}) = \frac{1}{t} \cdot e^{2-1} = \frac{e}{t}$, also $H(\frac{1}{t}|\frac{e}{t})$ wegen $f''(\frac{1}{t}) = -te < 0$.

Wendepunkt: $t^2x - 2t = 0$ ergibt $t = \frac{2}{t}$, wegen $f(\frac{2}{t}) = \frac{2}{t} \cdot e^{2-2} = \frac{2}{t}$ also also $W(\frac{2}{t}|\frac{2}{t})$.

b) Die Steigung der Tangente ist $m = f_t'(0) = e^2$, deren Gleichung also $y = e^2x$. Einsetzen von $P(1|e^2)$ zeigt, dass P auf der Tangente liegt.

c) Wegen $f(0) = 0$ gehen alle Schaubilder durch den Ursprung.

d) Alle Wendepunkte liegen, wie man an $W(\frac{2}{t}|\frac{2}{t})$ sehen kann, auf $y = x$. Die Standardmethode verlangt, in den Gleichungen $x = \frac{2}{t}$ und $y = \frac{2}{t}$ die erste nach t aufzulösen und in die zweite einzusetzen; dies liefert $t = \frac{2}{x}$ und $y = \frac{2}{\frac{2}{x}} = 2 \cdot \frac{x}{2} = x$.

e) Es muss $F_t'(x) = f_t(x)$ gelten. Ableiten liefert

$$\begin{aligned} F_t'(x) &= ae^{2-tx} - t(ax+b)e^{2-tx} = ae^{2-tx} - atxe^{2-tx} - bte^{2-tx} \\ &= (a - atx - bt)e^{2-tx}. \end{aligned}$$

Damit dies gleich $f(x) = xe^{2-tx}$ ist, muss $-atx = x$ und $a - bt = 0$ sein. Also ist $a = -\frac{1}{t}$ und $-\frac{1}{t} - bt = 0$, d.h. $b = -\frac{1}{t^2}$. Die Stammfunktion ist also

$$F_t(x) = \Big(-\frac{x}{t} - \frac{1}{t^2}\Big)e^{2-tx}.$$

Zur Kontrolle noch einmal ableiten!

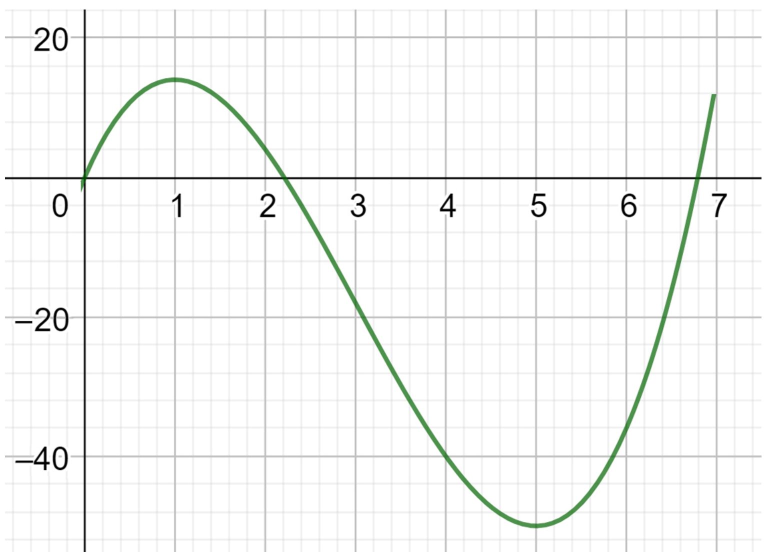
Höhenprofil

Die Funktion h mit

$$h(x) = 2x^3 - 18x^2 + 30x, \qquad 0 \leq x \leq 7,$$

beschreibt näherungsweise das Höhenprofil eines Straßenradrennens. Dabei gibt x die in horizontaler Richtung zurückgelegte Strecke in Kilometern und $h(x)$ die Höhe in Metern an.

Das Profil sieht so aus:



a) *Ermitteln Sie diejenigen Stellen des Profils, an denen dieselbe Höhe wie zu Beginn des Rennens erreicht wird.*

Das sollte keine Probleme bereiten: die Anfangshöhe ist $h(0) = 0$, also müssen wir die beiden anderen Nullstellen berechnen.

$$h(x) = 2x(x^2 - 9x + 15) = 0$$

führt auf $x_1 = 0$ (die Anfangshöhe), sowie $x_2 \approx 2{,}2$ und $x_3 \approx 6{,}8$.

Antwort: Nach 2,2 km und 6,8 km wird wieder die Anfangshöhe erreicht.

Berechnen Sie den maximalen Höhenunterschied des Profils.

Wir müssen die Differenz aus maximaler und minimaler Höhe bestimmen. Die minimale Höhe wird im Tiefpunkt von h angenommen, die maximale entweder im Hochpunkt oder am rechten Rand.

Extrempunkte:

$$0 = h'(x) = 6x^2 - 36x + 30 = 6(x^2 - 6x + 5) = 6(x-1)(x-5)$$

führt auf $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$. Wegen $h''(1) = -24 < 0$ und $h''(5) = 24 > 0$ liegt in x_1 ein Minimum und in x_2 ein Maximum vor.

Es ist $h(1) = 14$ und $h(7) = 14$, also ist die maximale Höhe 14 m. Wegen $h(5) = -50$ beträgt der maximale Höhenunterschied $14 - (-50) = 64$ Meter.

Bestimmen Sie die größte Steigung der Straße und geben Sie diese in Prozent an.

Der größte Anstieg liegt am Rand, das größte Gefälle im Wendepunkt.

$h'(0) =$, $h'(7) = 72$ zeigt, dass der größte Anstieg nach 7 km vorliegt. Die Einheit der Steigung ist m/km (Einheit der y-Achse durch Einheit der x-Achse), also ist die Steigung nach 7 km gleich 72 m/km = 0,072, also gleich 7,2 %.

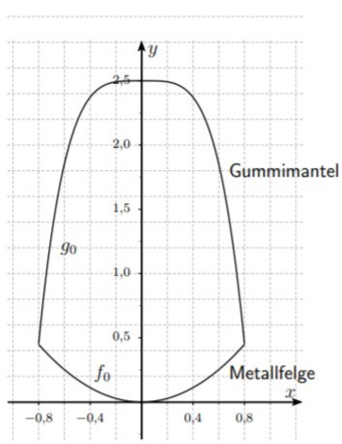
Der Wendepunkt liegt bei $x = 3$, und wegen $h'(3) = -24$ ist die größte Steigung bei $x = 7$.

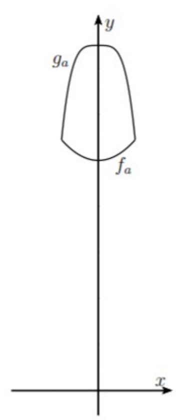
Skizzieren Sie den Graphen von h in einem geeigneten Koordinatensystem.

Siehe oben.

b) *Berechnen Sie die maximale Breite des Reifens R_0.*

Hier muss man erst einmal herausfinden, was die Aufgabensteller von einem wollen. Der Reifen R_0 wird durch die Funktionen $f_0(x) = 0{,}7x^2$ und $g_0(x) = -5x^4 + 2{,}496$ beschrieben, wobei f_0 die Metallfelge unten und g_0 den Gummimantel oben beschreibt. Ein Blick auf die mitgelieferten Skizzen zeigt, dass die maximale Breite etwa 1,6 cm betragen. Offenbar muss man, um diese auszurechnen, die beiden Funktionen schneiden.





$$\begin{aligned} f_0(x) &= g_0(x) \\ 0{,}7x^2 &= -5x^4 + 2{,}496 \\ 5x^4 + 0{,}7x^2 - 2{,}496 &= 0 \end{aligned}$$

Mit Substitution usw. kommt man auf $x^2 = 0{,}64$ bzw. $x^2 = -0{,}78$. Als Nullstellen erhält man also in der Tat $x_{1,2} = \pm 0{,}8$. Damit ist die Breite des Reifens $0{,}8 - (-0{,}8) = 1{,}6$ Zentimeter.

Bestimmen Sie den Winkel, unter dem Metallfelge und Gummimantel beim Reifen R_0 aufeinander treffen.

Hier geht es um den Winkel, unter dem sich die Schaubilder in $x = \pm 0{,}8$ schneiden. Bei Schaubildern sind die Schnittwinkel immer die Schnittwinkel der Tangenten. Wir rechnen also die Steigungen der Tangenten an f_0 und g_0 in $x = 0{,}8$ aus; wegen der Achsensymmetrie beider Funktionen ist der Winkel in $x = -0{,}8$ genauso groß.

Den Steigungswinkel α einer Geradeb erhält man aus der Steigung m mit der Formel $m = \tan\alpha$, die man am Steigungsdreieck ablesen oder der Merkhilfe entnehmen kann:

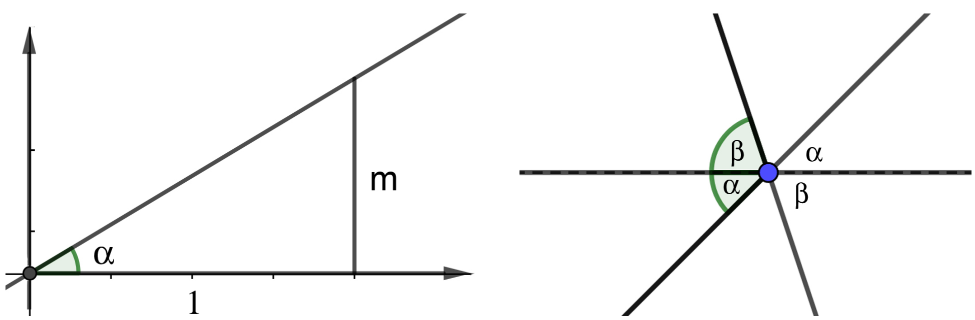


Abbildung 1. Steigungswinkel und Schnittwinkel

- $f_0'(x) = 1{,}4x$; $m_1 = f_0'(0{,}8) = 1{,}12 = \tan\alpha$ ergibt $\alpha \approx 48{,}24°$.
- $g_0'(x) = -20x^3$; $m_2 = g_0'(0{,}8) = -10{,}24 = \tan\beta$ ergibt $\beta = -84{,}42°$.

Der Schnittwinkel ist $\gamma = \alpha - \beta \approx 48{,}24° + 84{,}52° = 132{,}66° \approx 132{,}7°$.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt von Q_0. Begründen Sie, warum der Flächeninhalt von Q_a unabhängig von a ist.

Hier muss man die Querschnittsfläche berechnen, also die Fläche zwischen f_0 und g_0. Wir finden

$$\begin{aligned} A_0 &= 2 \cdot \int_0^{0,8} (g_0(x) - f_0(x))\,dx \approx 3{,}1 \\ &= 2 \cdot \int_0^{0,8} (-5x^4 - 0{,}7x^2 + 2{,}496)\,dx \\ &= 2(-x^5 - \frac{7}{30}x^3 + 2{,}496x)\Big|_0^{0,8} \approx 3{,}099. \end{aligned}$$

Die Querschnittsfläche beträgt also etwa 3,1 cm^2.

Die Schaubilder von f_a und g_a entstehen aus f_0 und g_0 durch Verschieben um a nach oben. Das ändert den Flächeninhalt nicht.

c) *Ein Modell des Reifens R_{30} entsteht durch Rotation von Q_{30} um die x-Achse.*

Berechnen Sie das Volumen des Reifens R_{30}.

Die Fläche zwischen den beiden Funktionen g_{30} und f_{30} rotiert um die x-Achse. Das Volumen erhält man, indem man vom Volumen V_1, das man durch Rotation von g_{30} um die x-Achse erhält, das Volumen V_2 subtrahiert, das man durch Rotation von f_{30} um die x-Achse erhält. Beim Berechnen der Integrale habe ich wieder die Achsensymmetrie ausgenutzt und das Integral von $-0{,}8$ bis $0{,}8$ durch das Doppelte des Integrals von 0 bis 0,8 ersetzt.

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_{-0,8}^{0,8} g_{30}(x)^2\,dx = 2\pi \int_0^{0,8} (-5x^4 + 32{,}496)^2\,dx \\ &= 2\pi \int_0^{0,8} (25x^8 - 324{,}96x^4 + 32{,}496^2)\,dx \\ &= 2\pi \Big[\tfrac{25}{9}x^9 - 64{,}992x^5 + 32{,}496^2 x\Big]_0^{0,8} \\ &\approx 2\pi \cdot 823{,}87 \approx 5176{,}53. \\ V_2 &= 2\pi \int_0^{0,8} f_{30}(x)^2\,dx = 2\pi \int_0^{0,8} (0{,}7x^2 + 30)^2\,dx \\ &= 2\pi \int_0^{0,8} (0{,}49x^4 + 4{,}2x^2 + 900)\,dx = 2\pi \Big[0{,}098x^5 + 1{,}4x^3 + 900x\Big]_0^{0,8} \\ &\approx 2\pi \cdot 727{,}2 \approx 4569{,}13 = 607{,}4 \end{aligned}$$

Das Volumen ist daher 607,4 cm^3.

Der Inhalt der Querschnittsfläche Q_a ist unabhängig von a. Erklären Sie, warum das Volumen des Reifens R_a dennoch von a abhängig ist.

Der innere Radius des Reifens ist a; je größer a ist, um so größer ist das Volumen.

d) *Gegeben ist der Punkt $A(0{,}4|2{,}368)$ auf dem Graphen von g_0. Bestimmen Sie den Punkt $B(x|f_0(x))$ auf dem Graphen von f_0 im Intervall $[-0{,}8; 0{,}8]$, für den die Länge der Strecke $\overline{AB}$ maximal ist.*

Der Abstand ist

$$d(x) = \sqrt{(0{,}4 - x)^2 + (2{,}368 - f_0(x))^2}.$$

Man mus daher $d'(x) = 0$ setzen und nachprüfen, ob die zweite Ableitung an dieser Stelle negativ ist (wahlweise: ob die erste Ableitung eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von + nach − hat).

Will man das Maximum bestimmen, so überlegt man sich, dass der Abstand $d(x)$ genau dann maximal ist, wenn $D(x) = d(x)^2$ maximal ist; also muss man das Maximum von

$$D(x) = d(x)^2 = (0{,}4 - x)^2 + (2{,}368 - f_0(x))^2$$

bestimmen.

$D'(x) = 0$ setzen liefert

$$\begin{aligned} D'(x) &= -2(0{,}4 - x) - 2((2{,}368 - f_0(x))f_0'(x) = -0{,}8 + 2x - 2{,}8x(2{,}368 - 0{,}7x^2) \\ &= 1{,}96x^3 - 4{,}6304x - 0{,}8 = 0. \end{aligned}$$

Dies ist eine Gleichung dritten Grades, die sich ohne Hilfsmittel nicht lösen lässt; die gesuchte Lösung ist $x = -0{,}175$.