K2 MATHEMATIK KLAUSUR 1

14.10.2020

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Punkte (max)	2	2	3	3	6	3	4	3	3	1
Punkte										

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^3+1}{2x}.$$

(2) Die Funktion f ist gegeben durch

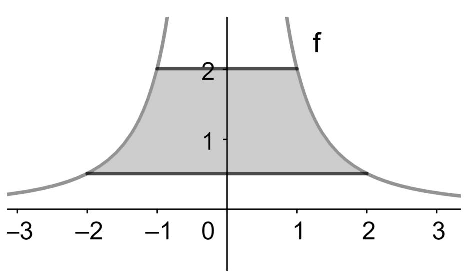
$$f(x) = \pi \sin(\tfrac{\pi}{3}x).$$

Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f derart, dass $F(3) = 2$ ist.

(3) Lösen Sie die Gleichung

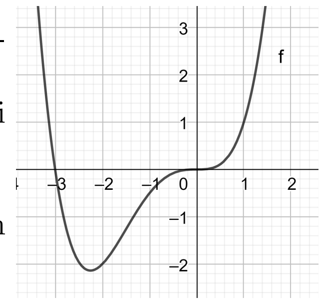
$$e^{2x} + 20e^{-2x} = 9.$$

(4) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x^2}$. Das Schaubild von f und die Geraden $y = 2$ und $y = \frac{1}{2}$ bestimmen eine Fläche. Berechnen Sie deren Flächeninhalt.



(5) Abgebildet ist der Graph einer Funktion f. Sei F eine Stammfunktion von f. Begründen Sie, welche der folgenden Aussagen wahr, falsch oder unentscheidbar sind.

(a) Das Schaubild von F besitzt zwei Extrempunkte.
(b) Das Schaubild von F besitzt zwei Wendepunkte.
(c) Es ist $F(1) > F(0)$.
(d) Die mittlere Steigungsrate von f im Intervall $[0; 1]$ ist 0,5.



Die Gleichung von f hat die Form $f(x) = ax^3(x - b)$. Bestimmen Sie die Werte von a und b.

(6) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \end{array}$$

(7) Bestimmen Sie eine Gleichung in Koordinatenform der Ebene E durch die Punkte $A(0|0|2)$, $B(6|1|-1)$ und $C(4|1|0)$ (mögliches Zwischenergebnis: $x_1 + 2x_3 = 4$).

Zeichnen Sie die Ebene E in ein geeignetes Koordinatensystem.

Die Koordinatenebenen, die Ebene E und die Ebene mit der Gleichung $x_2 = 5$ legen einen Körper fest. Bestimmen Sie sein Volumen.

(8) Der Punkt $P(-1|-8|4)$ wird an der Ebene $E : 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -8$ gespiegelt; bestimmen Sie die Koordinaten des Bildpunkts.

Geben Sie die Gleichung einer Ebene F an, die parallel zu E ist und den doppelten Abstand zu P hat wie E.

(9) Ein fairer Würfel wird zwei Mal geworfen.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Augensumme von mindestens 10 geworfen wird.

b) Bei einem Einsatz von 1 Euro erhält ein Spieler bei einer Augensumme von mindestens 10 eine Auszahlung von 5 Euro, andernfalls erhält er nichts. Bestimmen Sie den Erwartungswert für den Gewinn des Spielers.

(10) Welches ist die letzte Ziffer der Zahl $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 99$?

Lösungen

(1) Wir finden

$$f(x) = \frac{x^3+1}{2x} = \frac{1}{2}(x^3+1)\cdot x^{-1}$$
$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2\cdot x^{-1} - \frac{1}{2}(x^3+1)x^{-2} = \frac{3x}{2} - \frac{x^3+1}{2x^2},$$

oder mit der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{3x^2\cdot 2x - (x^3+1)\cdot 2}{4x^2} = \frac{3x^3 - x^3 - 1}{2x^2} = \frac{2x^3-1}{2x^2}$$

oder durch Auseinanderziehen

$$f(x) = \frac{x^3}{2x} + \frac{1}{2x} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x},$$
$$f'(x) = x - \frac{1}{2x^2}$$

(2) Es ist

$$F(x) = -3\cos(\tfrac{\pi}{3}x) + c.$$

Damit folgt

$$2 = F(3) = -3\cos(\pi) + c = 3 + c,$$

also $c = -1$.

(3) Nenner weg, alles auf eine Seite, Substitution:

$$\begin{aligned} e^{2x} + \frac{20}{e^{-2x}} &= 9 && \Big|\ \cdot e^{2x} \\ e^{4x} + 20 &= 9e^{2x} && \Big|\ - 9e^{2x} \\ e^{4x} - 9e^{2x} + 20 &= 0 && \Big|\ e^{2x} = z \\ z^2 - 9z + 20 &= 0 \end{aligned}$$

Also $z_1 = 4$, $z_2 = 5$ und damit $e^{3x} = 4$ bzw. $e^{2x} = 5$. Daraus folgt $x_1 = \frac{1}{2}\ln(4)[= \ln(2)]$ und $x_2 = \frac{1}{2}\ln(5)$.

Kürzer mit Vieta:

$$e^{4x} - 9e^{2x} + 20 = (e^{2x} - 4)(e^{2x} - 5) = 0.$$

(4) Schnittpunkte der Geraden mit dem Schaubild von f sind $(\pm 1|2)$ und $(\pm 2|\frac{1}{2})$.

Die zu bestimmende Fläche besteht aus einem Rechteck und zwei Flächen, die man durch Integrale bestimmt:

$$A = 2 \cdot 1{,}5 + 2\int_1^2 (f(x) - \tfrac{1}{2})\,dx.$$

Wegen

$$\int_1^2 (f(x) - \tfrac{1}{2})\,dx = -\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}$$

folgt jetzt

$$A = 3 + 1 = 4.$$

(5) Begründen Sie, welche der folgenden Aussagen wahr, falsch oder unentscheidbar sind.

(a) Das Schaubild von F besitzt zwei Extrempunkte: Diese Aussage ist wahr, weil das Schaubild von f zwei Nullstellen mit Vorzeichenwechsel besitzt.

(b) Das Schaubild von F besitzt zwei Wendepunkte: Diese Aussage ist falsch, weil das Schaubild von f nur einen Extrempunkt besitzt.

(c) Es ist $F(1) > F(0)$: Diese Aussage ist wahr, weil f im Intervall $[0; 1]$ keine negativen Werte annimmt.

Alternativ: $F(1) - F(0) = \int_0^1 f(x)\,dx$ ist positiv, weil das Schaubild von f oberhalb der x-Achse liegt.

(d) Die mittlere Steigungsrate von f im Intervall $[0; 1]$ ist 0,5: Diese Aussage ist falsch, denn mit mittlere Steigungsrate auf diesem Intervall ist $m = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1$.

Nullstelle bei $x = -3$ ergibt $b = -3$; Einsetzen von $(1|1)$ liefert $1 = a(1+3)$, also $a = \frac{1}{4}$.

(6) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \end{array}$$

In Vektorform:

$$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Kreuzprodukt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; skalare Multiplikation mit diesem Vektor liefert $x_2(-10-2+4) = 0-1-3$, also $x_2 = \frac{1}{2}$. Einsetzen liefert das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 1 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 1 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 2 & + & 3x_3 & = & 3 \end{array}$$

Daraus folgt dann schnell $x_1 = -2$ und $x_3 = 3$.

(7) Ebenengleichung

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Kreuzprodukt $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ebenengleichung $E : x_1 + 2x_3 = 4$.

Spurpunkte $S_1(4|0|0)$, $S_3(0|0|2)$.

Volumen eines Prismas; entweder halber Quader $V = \frac{1}{2}Gh = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 2 = 20$ oder $V = Gh$, wobei G die linke Dreiecksfläche ist, also $V = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 = 20$.

(8) Lotgerade (Richtungsvektor $= \vec{n}$): $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Schneiden mit E:

$$\begin{aligned} -8 &= 2(-1 + 2t) - 4(-8 - 4t) + 4 + t \\ &= -2 + 4t + 32 + 16t + 4 + t = 34 + 21t \end{aligned}$$

liefert $t = -2$, also $L(-5|0|2)$.

P an L spiegeln ergibt $P'(-9|8|0)$.

Ebene $F : x_1 + 2x_3 = d$. Einsetzen von P' in E ergibt $F : x_1 + 2x_3 = -9$.

(9) a) Die Wahrscheinlichkeit für

- zwei verschiedene Zahlen ist $p = 1 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$.
- eine Augensumme von mindestens 10 ist $p = \frac{3+2+1}{36} = \frac{1}{6}$.

b) Wir finden

A	5	0
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Also ist $E(A) = \frac{5}{6}$, d.h. man erwartet einen Gewinn von $-\frac{1}{6}$ Euro.