NACHTERMIN 2017

F. LEMMERMEYER

Pflichtteil

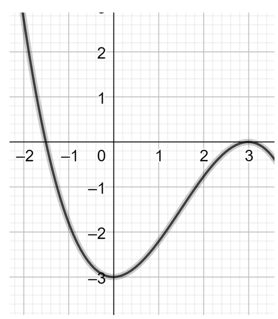
(1) Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (x^3 + 2) \cdot \cos(x)$.

(2) Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Wert des Integrals $\int\limits_1^{e^2} \frac{4}{x}\,dx$ größer als 7 ist.

(3) Lösen Sie die Gleichung $\cos(x) \cdot \sin(x) + 3 \cdot \sin(x) = 0$ für $0 \le x \le 2\pi$.

(4) Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.

F ist eine Stammfunktion von f, f' die Ableitungsfunktion von f. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie jeewils Ihre Entscheidung.



(1) Der Graph von F hat bei $x = 3$ einen Tiefpunkt.

(2) Der Graph von F hat auf der y-Achse einen Wendepunkt.

(3) $\int\limits_0^3 f'(x)\,dx = -3$

(4) Es gibt eine Stammfunktion G von f mit $G(-1) = G(2)$.

(5) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 6 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & 6 \end{array}$$

Interpretieren Sie das Gleichungssystem und seine Lösungsmenge geometrisch.

(6) Gegeben sind der Punkt $P(-2|3|0)$ und die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie den Abstand von P zu g.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten zweier Punkte, die vom Ursprung jeweils doppelt so weit entfernt sind wie von P.

(7) Für ein Gewinnspiel mit einem Glücksrad sind in der Tabelle die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse und die zugehörigen Gewinne angegeben.

Farbe	blau	grün	rot
Wahrscheinlichkeit	0,4	0,1	0,5
Gewinn bei einmaligem Drehen (in €)			

a) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass bei dreimaligem Drehen jede Farbe genau einmal erscheint.

Entscheiden Sie, ob $p = 3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5$ gilt, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Bestimmen Sie den Gewinn g für das Ergebnis „blau“ so, dass sich bei einmaligem Drehen ein faires Spiel ergibt.

Wahlteil A 2.1

Die Konzentration eines Stoffes, welcher bei einer chemischen Reaktion gewonnen wird, kann durch die Funktion f beschrieben werden mit

$$f(t) = 750 \cdot (e^{-0{,}5 \cdot t} - e^{-t}); 0 \leq t \leq 10$$

(Zeit t i nMinuten, Konzentration $f(t)$ in mg/l).

a) Bestimmen Sie die maximale Konzentration.

Zu welchen Zeitpunkten beträgt die Konzentration 130 mg/l?

Ermitteln Sie, wann die Abnahme der Konzentration am größten ist.

Bestimmen Sie die mittlere Konzentration innerhalb der ersten 5 Minuten.

b) Tatsächlich hängt die Konzentration auch von der Temperatur ab und wird beschrieben durch

$$f_a(t) = 15 \cdot a \cdot \left(e^{-\frac{1}{100} \cdot a \cdot t} - e^{-\frac{1}{50} \cdot a \cdot t}\right); \quad t \geq 0; \quad 0 < a < 100$$

(Temperatur a in °C; Zeit t in Minuten, Konzentration $f_a(t)$ in mg/l).

Berechnen Sie die Konzentration des Stoffes nach einer Minute bei einer Temperatur von 40°C.

Bei welcher höheren Temperatur erhält man diese Konzentration bereits nach 45 Sekunden?

Aufgabe A2.2. Der Graph einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades besitzt den Extrempunkt $E(-2|\frac{9}{2})$ und den Wendepunkt $W(-1|\frac{7}{2})$.

a) Begründen Sie ohne Rechnung, dass der Graph von g genau zwei Extrempunkte besitzt und E ein Hochpunkt ist.

Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von g. (Teilergebnis: $g(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}$)

b) Für $u > 0$ begrenzt der Graph von g mit den Koordinatenachsen und der Geraden $x = u$ eine Fläche des Inhalts 20. Berechnen Sie den Wert von u.

c) Die Funktion h ist gegeben durch $h(x) = -g(x + 3) + 4$. Beschreiben Sie, wie der Graph von h aus dem Graphen von g hervorgeht.

d) Untersuchen Sie, ob die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{9}{2}x$ den Graphen von g berührt.

Geben Sie die Anzahl der Lösungen der Gleichung $g(x) = k \cdot x$, in Abhängigkeit von k $(k \in \mathbb{R})$ an.

Wahlteil B1

In einem Koordinatensystem ist ein Quader ABCDEFGH mit Grundfläche ABCD gegeben, dessen Kanten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Dabei sind $D(0|0|0)$ und $F(2|4|3)$ Eckpunkte des Quaders.

a) Die Ebene K enthält die Punkte B, C, E und H.

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene K.

Berechnen Sie den Winkel, unter dem die Ebene K die x_1x_2 -Ebene schneidet.

Berechnen Sie den Abstand des Punktes G von der Ebene K.

(Teilergebnis: $K : 3x_2 + 4x_3 = 12$)

b) Der Punkt P^* entsteht durch Spiegelung des Punktes $P(0{,}5|1|0)$ an der Ebene K.

Untersuchen Sie rechnerisch, ob P^* innerhalb des Quaders liegt.

c) Die Ebene $L : 3x_2 + 4x_3 = 16$ schneidet den Quader.

Berechnen Sie den Inhalt der entstehenden Schnittfläche.

Die Ebenen K und L gehören zu der Ebenenschar $E_d : 3x_2 + 4x_3 = d$ ($d \in \mathbb{R}$).

Für welche Werte von d haben der Quader und E_d keine gemeinsamen Punkte?

Stochastik C1

Ein Süßwarenhersteller produziert verschiedenfarbige Fruchtgummischlangen. Von jeder Farbe wird ein immer gleichbleibender Anteil produziert. Der Anteil der roten Schlangen beträgt 10 %. Jeweils 10 Fruchtgummischlangen werden in eine Tüte verpackt.

Die Verteilung der Schlangen auf die Tüten erfolgt zufällig.

a) Kim kauft fünf Tüten und öffnet diese nacheinander.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

- A: In den fünf Tüten sind insgesamt genau acht rote Schlangen enthalten.
- B: In der ersten Tüte befindet sich mindestens eine rote Schlange.
- C: Nur in der letzten geöffneten Tüte befindet sich mindestens eine rote Schlange.
- D: In genau zwei der fünf Tüten befinden sich jeweils mindestens zwei rote Schlangen.

b) Robert möchte, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens eine rote Schlange zu erhalten, mindestens 98 % beträgt.

Wie viele Tüten muss er dazu mindestens kaufen?

c) Lea kauft 200 Fruchtgummischlangen und schlägt Paul ein Spiel vor: Paul darf mit verbundenen Augen zwei Schlangen ziehen und behalten. Wenn darunter mindestens eine grüne ist, erhält er alle Schlangen, andernfalls muss er Lea zwei Euro bezahlen.

Für welche Anzahlen grüner Schlangen erhält Lea mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % zwei Euro?

Stochastik Wahlteil C2

Bei einer verbeulten Münze beträgt die Wahrscheinlichkeit für „Wappen“ 62 % und für „Zahl“ 38 %.

a) Die Münze wird dreißig Mal geworfen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Man erhält genau zwanzig Mal „Wappen“.

B: Man erhält häufiger „Wappen“ als „Zahl“.

C: Man erhält mehr als dreizehn Mal „Wappen“, aber die ersten drei Würfe zeigen „Zahl“.

b) Wie oft darf man die Münze höchstens werfen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 20 % mehr als zehnmal „Zahl“ erhält?

c) Bei einer anderen verbeulten Münze wird vermutet, dass man „Wappen“ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 70 % erhält. Deshalb soll ein Test auf einem Signifikanzniveau von 5 % mit einem Stichprobenumfang von 200 durchgeführt werden. Als Nullhypothese wird die Vermutung verwendet.

Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Tatsächlich beträgt die Wahrscheinlichkeit für „Wappen“ sogar 72 %. Wie groß ist in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in obigem Test die Nullhypothese fälschlicherweise verworfen wird?

Pflichtteil

(1) $f'(x) = 3x^2\cos(x) - (x^3+2)\sin x$.

(2) $\int\limits_1^{e^2} \frac{4}{x}\,dx = 4\ln(x)\Big|_1^{e^2} = 4\ln(e^2) - 4\ln(0) = 8$ wegen $\ln(e^2) = 2\ln(e) = 2$. Also ist der Wert des Integrals ganzzahlig.

(3) Ausklammern: $\sin(x)[\cos(x)+3] = 0$; Weil $\cos(x) = 3$ keine Lösungen hat, muss $\sin(x) = 0$ sein, Dies liefert $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$ und $x_3 = 2\pi$.

(4) (1) Die Aussage ist falsch: f hat in $x = 3$ keinen Vorzeichenwechsel, also besitzt das Schuabild von f dort keinen Extrempunkt.

(2) Die Aussage ist richtig, weil f dort einen Extrempunkt besitzt.

(3) Die Aussage ist falsch wegen

$$\int_0^3 f'(x)\,dx = f(3) - f(0) = 0 - (-3) = 3 \neq -3.$$

(4) Die Aussage ist falsch: wegen $f(x) < 0$ in disem Intervall ist G dort streng monoton fallend, also $G(-1) > G(2)$.

Oder man schätzt $G(2) - G(-1) = \int_{-1}^2 f(x)\,dx \approx -6$ durch Kästchenzählen ab.

(5) Lösen führt auf eine Gleichung $0 = 0$; danach kann man etwa $x_2 = t$ setzen und erhält

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

als Schnittgerade der drei Ebenen.

(6) a) Schneiden der Lotebene $E: 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$ mit der Geraden liefert $t = -2$ und den Lotfußpunkt $L(-1|5|-2)$. Als Abstand ergibt sich $\overline{PL} = 3$.

b) Man kann beispielsweise $\overrightarrow{Oq} = 2\overrightarrow{OP}$ und damit $Q(-4|6|0)$ ider $\overrightarrow{QR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OP}$ und $R(-\frac{4}{3}|2|0)$ nehmen.

(7) a) Es ist $p = 6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}12$, weil es sechs und nicht drei Pfade gibt.

b) Aus $E(X) = 0{,}4g + 0{,}1 \cdot 2 - 0{,}5 \cdot 1$ folgt $g = 0{,}75$.

1. Analysis A2.1

a) Maximum von f: $0 = f'(t) = 750(-0{,}5e^{-0{,}5t} + e^{-t})$ ergibt $e^{-t} = 0{,}5e^{-0{,}5t}$. Division durch $e^{-0{,}5t} \neq 0$ ergibt $e^{-0{,}5t} = 0{,}5$, also $t \approx 1{,}39$ und $f(1{,}39) \approx 188$. Die maximale Konzentration ist etwa 188 mg/l.

Ansatz: $f(t) = 130$. Also ist $e^{-0{,}5t} - e^{-t} = \frac{13}{75}$. Mit $z = e^{-0{,}5t}$ ist $z^2 = e^{-t}$ und $z^2 - z + \frac{13}{75} = 0$. Dies ergibt $z_1 \approx 0{,}223$ und $z_2 \approx 0{,}777$, also $e^{-0{,}5t} \approx 0{,}223$ bzw. $e^{-0{,}5t} \approx 0{,}777$. Damit wird $t_1 \approx 3$ und $t_2 \approx 0{,}5$.

Also ist dies nach 0,5 Minuten und nach 3 Minuten der Fall.

Abnahme am größten: Minimum von f'. Also $f''(t) = 0$ setzen. Die maximale Abnahme erfolgt nach etwa 2,8 Minuten.

Mittlere Konzentration:

$$\frac{1}{5}\int_0^5 f(t)\,dt = 750[e^{-t} - 2e^{-0{,}5t}]\Big|_0^5 \approx 126.$$

Die mittlere Konzentration beträgt ca. 126 mg/l.

b) Konzentration nach einer Minute: $f_{40}(1) \approx 133$; die Konzentration beträgt etwa 133 mg/l.

Bei der nächsten Frage ist man bei der Lösung der Gleichung

$$15a(e^{-\frac{1}{100}\cdot a\cdot 0{,}75} - e^{-\frac{1}{50}\cdot a\cdot 0{,}75}) \approx 133$$

auf Probieren angewiesen; die Antwort lautet: nach ca 45 Sekunden.

Aufgabe A2.2. a) g' hat Grad 2 und eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel in $x = -2$. Also gibt es eine weitere Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, folglich hat g zwei Extrempunkte.

Weil E oberhalb des Wendepunktes liegt, muss E ein Hochpunkt sein.

Der Ansatz $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und die Gleichungen $g(-2) = \frac{9}{2}$, $g(-1) = \frac{7}{2}$, $g'(-2) = 0$ und $g''(-1) = 0$ liefern $g(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}$.

b) Es soll $\int\limits_0^u g(x)\,dx = 20$ sein; ohne GTR bleibt nur Probieren; man findet $u \approx 2{,}5$.

c) Man spiegelt das Schaubild von g an der x-Achse, verschiebt es um 3 nach links und dann um 4 nach oben.

d) $g'(x) = \frac{9}{2}$ ergibt $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$. Wegen $g(1) = \frac{9}{2}$ berührt die Geraden das Schaubild von g in $B(1|\frac{9}{2})$.

Eine Skizze zeigt: Für $k < 0$ existiert ein Schnittpunkt, für $k = \frac{9}{2}$ zwei Schnittpunkte (einer davon ein Berührpunkt), und für $k > \frac{9}{2}$ gibt es drei Schnittpunkte.

Wahlteil B1

a) $E: 3x_2 + 4x_3 = 12$. Die x_1x_2-Ebene hat $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; also $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha \approx 36{,}9°$.

Abstand Punkte-Ebene mit HNF ergibt $d = \frac{12}{5}$.

b) Spiegeln von P; Berechnung des Lotfußpunktes mit Lotgerade

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t\vec{n}_K = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ergibt $t = 0{,}36$ und $P^* = 0{,}5|3{,}16|2{,}88)$. Alle Koordinaten liegen zwischen denen von D und F; also liegt P^* im Quader.

c) Weil L parallel zu FG ist, ist die Schnittfläche ein Rechteck mit der Breite $\overline{FG} = 2$. S_1 und S_2 sind Eckpunkte des Rechtecks auf den Kanten HG und CG. Schneiden liefert $S_1(0|\frac{4}{3}|3)$ und $S_2(0|4|1)$. Also ist $A = \frac{20}{3}$ der gesuchte Flächeninhalt.

Für $d = 0$ liegt D in E_d, für $d = 24$ liegt F in E_d. Für $d < 0$ oder $d > 24$ haben der Quader und E_d keine gemeinsamen Punkte.

Stochastik C1

X_A bezeichne die Gesamtzahl der roten Schlangen in fünf Tüten. X_A ist binomialverteilt mit $n = 50$ und $p = 0{,}1$.

- $p(A) = p(X_A = 8) \approx 0{,}064$.
- X_B sei die Anzahl der roten Schlangen in einer Tüte. X_B ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}1$.

  $p(B) = 1 - p(X_B = 0) \approx 0{,}651$.
- $p(C) = (0{,}9^{10})^4 \cdot p(B) \approx 0{,}01$.
- X_D vezeichne die Anzahl der Tüten mit mindestens zwei roten Schlangen. X_D ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = p(X_B \geq 2) \approx 0{,}264$. Also ist $p(D) = p(X_D = 2) \approx 0{,}278$.

b) Sei Y die Gesamtzahl der roten Schlangen in allen gekauften Tüten. Y ist binomialverteilt mit unbekanntem Parameter n und $p = 0{,}1$. Gesucht ist die kleinste drch 10 teilbare Zahl n mit $p(Y \geq 1) \geq 0{,}98$, also $p(Y = 0) \leq 0{,}02$. Man findet, dass Robert mindestens 4 Tüten kaufen muss.

c) Lea Lea erhält zwei Euro, wenn keine der Schlangen grün ist. Bezeichnen Z die Anzahl der gezogenen grünen Schlangen und g die Gesamtzahl der grünen Schlangen, so ist

$$p(\text{Lea erhält zwei Euro}) = p(Z = 0) = \frac{200-g}{200} \cdot \frac{199-g}{199}.$$

- Für $g = 21$ erhält man $p(Z = 0) \approx 0{,}801 > 0{,}8$;
- Für $g = 22$ erhält man $p(Z = 0) \approx 0{,}792 < 0{,}8$.

Wenn die Anzahl der grünen Schlangen höchstens 21 beträgt, erhält Lea mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % zwei Euro.

Stochastik Wahlteil C2

X bezeichne die Anzahl der Würfe mit Wappen; X ist binomialverteilt mit $n = 30$ und $p = 0{,}62$.

A: $p(A) = p(X = 20) \approx 0{,}133$;

B: $p(B) = p(X \geq 16) = 1 - p(X \leq 15) \approx 0{,}877$;

C: X_C bezeichne die Anzahl der Würfe mit Wappen; X_C ist binomialverteilt mit $n = 27$ und $p = 0{,}62$.

$p(C) = 0{,}38^3 \cdot p(X > 13) \approx 0{,}049$.

b) Y sei die Anzahl der Würfe, die Zahl zeigen. Y ist binomialverteilt mit unbekanntem Parameter n und $p = 0{,}38$.

Gesucht ist die größte Zahl n mit $p(Y > 10) \leq 0{,}2$.

Für $n = 22$ erhält man $p(Y > 10) \approx 0{,}173$, für $n = 23$ erhält man $p(Y > 10) \approx 0{,}223$.

Man darf höchstens 22 Mal werfen.

c) Z sei die Anzahl der Würfe, die Wappen zeigen. $n = 200$, Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$, $H_0 : p \leq 0{,}7$.

$p(Z \leq 128) \approx 0{,}040$; $p(Z \leq 129) \approx 0{,}054$; Ablehungsbereich $[0; 128]$.

Entscheidungsregel: Wenn weniger als 129 Würfe Wappen zeigen, wird die Nullhypothese verworfen, andernfalls nicht.

Z ist jetzt binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = 0{,}72$; $p8Z \leq 128) \approx 0{,}008$; Die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 fälschlicherweise abgelehnt wird, beträgt dann 0,8 %.