

## K1 ANALYSIS

02. 02. 2021

- (1) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktion:

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \cos(2x).$$

- (2) Untersuchen Sie, ob das Integral

$$\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{11-2x}} dx$$

einen ganzzahligen Wert hat.

- (3) Lösen Sie die Gleichung

$$x + \frac{2}{x} = \frac{8}{x^3}.$$

- (5) Welches ist die kleinste positive ganze Zahl, mit der man 84 multiplizieren muss, damit man eine Quadratzahl erhält?

Mittelwert  $M$  einer Funktion  $f$  im Intervall  $[a, b]$ :

$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

**Wahlteil Analysis.** Gegeben ist die Funktion  $f$  mit

$$f(t) = \frac{2e^t}{e^t + 9}.$$

Diese beschreibt das Wachstum einer Sonnenblume. Dabei bezeichnet  $t$  die Zeit in Monaten nach Beobachtungsbeginn und  $f(t)$  die Höhe der Sonnenblume in Metern.

a) Berechnen Sie, um wie viele Zentimeter die Sonnenblume innerhalb der ersten zwei Monate wächst.

Berechnen Sie, wann die Sonnenblume eine Höhe von 1,5 m erreicht.

b) Ermitteln Sie anhand des Schaubilds, wann die Sonnenblume am stärksten wächst, und geben Sie einen Näherungswert für die maximale Wachstumsrate an.

c) Zeigen Sie, dass die Ableitung von  $f$  gegeben ist durch

$$f'(t) = \frac{18e^t}{(e^t + 9)^2},$$

und weisen Sie nach, dass die Funktion  $f$  streng monoton wächst.

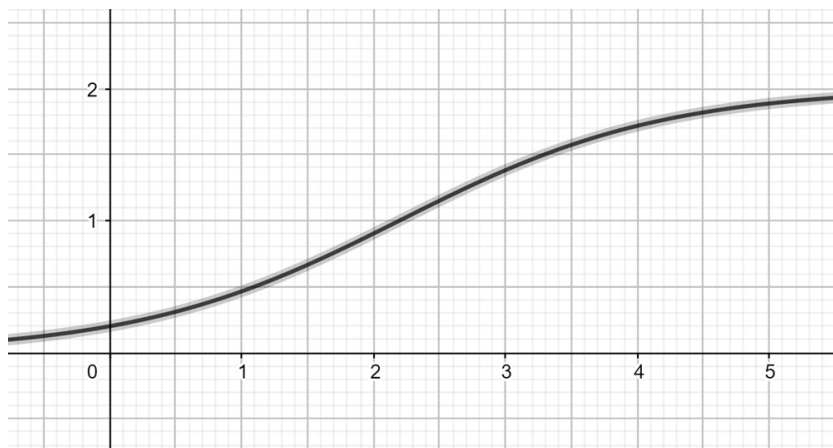
d) Interpretieren Sie die Gleichung  $f(t+3) = f(t) + 1$  im Sachzusammenhang, und geben Sie mit Hilfe der Abbildung eine Lösung an.

e) Zeigen Sie, dass

$$F(t) = 2 \ln(e^t + 9)$$

eine Stammfunktion von  $f$  ist.

Berechnen Sie die mittlere Höhe der Sonnenblume während der ersten vier Monate nach Beobachtungsbeginn.



## HINWEISE.

- (1) Produktregel!
- (2) Integral ausrechnen und bestätigen, dass das Ergebnis ganzzahlig ist.
- (3) Mit  $x^3$  durchmultiplizieren, alles auf eine Seite, Substitution oder Vieta.
- (4) Zerlege 84 in Faktoren:  $84 = 4 \cdot 21$ .

**Wahlteil.** a) „Innerhalb der ersten zwei Monate“ bedeutet, dass man wissen will, um wie viel die Sonnenblume nach zwei Monaten höher ist als zu Beginn. (Antwort: 0,7 m)

Höhe 1,5 m bedeutet, dass man die Gleichung  $f(t) = 1,5$  lösen muss. (Antwort: nach etwa 3,3 Monaten)

b) Stärkstes Wachstum heißt größte Steigung (Wendepunkt). Tangente im Wendepunkt einzeichnen, hinreichend großes Steigungsdreieck an die Tangente zeichnen, und die Steigung (Differenz der  $y$ -Koordinaten durch Differenz der  $t$ -Koordinaten) ausrechnen. Einheiten beachten!

c) Ableiten. Wenn man nicht die Quotientenregel benutzt hat, wird das Ergebnis anders aussehen; in diesem Fall das Ergebnis gleich der angegebenen Funktion setzen und solange vereinfachen, bis  $0 = 0$  dasteht.

Streng monoton steigend bedeutet, dass die Ableitung nur positive Werte annimmt. Es reicht also zu begründen, dass Zähler und Nenner positiv sind. Warum ist das so? (e-Funktion ist positiv, Quadrate sind  $\geq 0$ ).

d) Auf die Einheiten achten; welche Einheit hat  $t$ ? Was bedeutet also  $t + 3$ ? Welche Einheit hat  $f(t)$ ; was bedeutet also  $f(t) + 1$ ?

Antwort: In welchem 3-Monatszeitraum wächst die Pflanze um 1 m?

e) Hier muss man nachrechnen, dass  $F'(t) = f(t)$  ist.

Mittlere Höhe mit der Formel auf Seite 1 unten. (Antwort: 0,925 m)

## LÖSUNGEN

(1) Es ist

$$f'(x) = \frac{\cos(2x)}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} \sin(2x).$$

(2) Wir finden

$$\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{11-2x}} dx = -\sqrt{11-2x} \Big|_1^5 = -1 + 3 = 2.$$

Das Integral hat daher einen ganzzahligen Wert.

(3) Multiplikation mit  $x$  liefert

$$0 = x^4 + 2x^2 - 8 = (x^2 + 4)(x^2 - 2).$$

Also sind  $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$  die einzigen Lösungen.

(9) Offensichtlich ist  $84 \cdot 84$  eine Quadratzahl, daher auch  $84 \cdot \frac{84}{4}$ . Die kleinste positive ganze Zahl ist also 21.

(4) An den Asymptoten liest man ab, dass  $b = 3$  und  $c = 1$  ist. Einsetzen von  $(1|0)$  liefert  $a = 2$ .

Das Schaubild von  $g$  entsteht aus dem von  $f$  durch Spiegeln an der  $y$ -Achse. Also gehört  $g$  zu Abb. 2.

Das Schaubild von  $h$  entsteht aus dem von  $f$  durch Verschieben um  $d$  in  $x$ -Richtung. Also gehört  $h$  zu Abb. 3, und es ist  $d = -6$ .

**Wahlteil.** a)  $f(2) - f(0) \approx 0,7$ ; die Sonnenblume wächst um etwa 0,7 m.

$f(t) = 1,5$  liefert  $2e^t = 1,5(e^t + 9)$ , also  $0,5e^t = 13,5$ . Daher ist  $e^t = 27$ , somit  $t = \ln(27) \approx 3,3$ : nach etwa 3,3 Monaten ist die Sonnenblume 1,5 m hoch.

b) Gesucht ist die  $t$ -Koordinate des Wendepunkts; diese ist  $t \approx 2,2$ . Die Wachstumsrate zu diesem Zeitpunkt ist etwa  $f'(2,2) \approx 0,5$ , also etwa 0,5 m pro Monat.

c)

$$f'(t) = 2e^t(e^t + 9)^{-1} - 2e^t(e^t + 9)^{-2}e^t = \frac{2e^t}{e^t + 9} - \frac{2e^{2t}}{(e^t + 9)^2} = \frac{2e^t}{e^t + 9} \left(1 - \frac{e^t}{e^t + 9}\right).$$

Weil der Bruch in der Klammer  $< 1$  ist (Nenner größer als Zähler), ist  $f'(t)$  positiv und damit  $f$  streng monoton steigend.

Leichter mit

$$f'(t) = \frac{18e^t}{(e^t + 9)^2},$$

denn hier sind Zähler und Nenner beide positiv.

d) Die Sonnenblume ist innerhalb von 3 Wochen (im Zeitraum  $[t, t + 3]$ ) um 1 m gewachsen. Die Lösung der Gleichung ist  $t \approx 2$ .

e)  $F'(t) = \frac{2e^t}{e^t+9} = f(t)$ .

$$M = \frac{1}{4} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{2} \ln(e^t + 9) \Big|_0^4 = \frac{1}{2} \ln(e^4 + 9) - \frac{1}{2} \ln 10 \approx 0,925.$$

Die mittlere Höhe beträgt also etwa 0,925 m.