# K2 MATHEMATIK KLAUSUR 2

10. 01. 2020

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 5 | 4 | A a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte (max) | 2 | 3 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| Punkte | | | | | | | | | | |

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktion:

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \cos(2x).$$

(2) Untersuchen Sie, ob das Integral

$$\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{11-2x}}\,dx$$

einen ganzzahligen Wert hat.

(3) Lösen Sie die Gleichung

$$x + \frac{2}{x} = \frac{8}{x^3}.$$

(5) Welches ist die kleinste positive ganze Zahl, mit der man 84 multiplizieren muss, damit man eine Quadratzahl erhält?

Mittelwert $M$ einer Funktion $f$ im Intervall $[a, b]$:

$$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$

(4) Abbildung 1 zeigt den Graphen einer Funktion $f$ mit $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$.

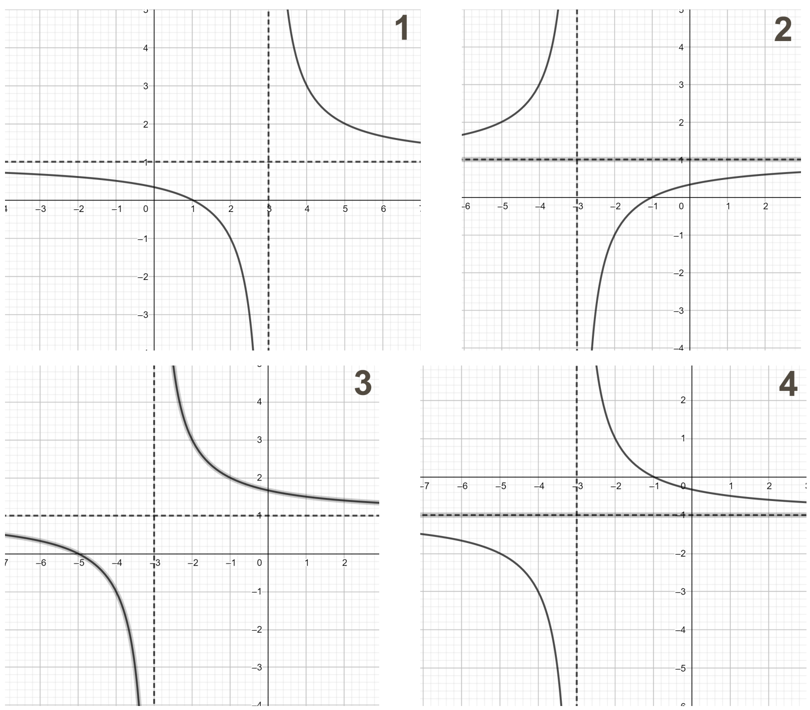
a) Bestimmen Sie $a$, $b$ und $c$.

b) Gegeben sind die Funktionen $g$ und $h$ mit

$$g(x) = f(-x) \quad \text{und} \quad h(x) = f(x-d).$$

Ordnen Sie diesen beiden Funktionen die dazugehörigen Abbildungen zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Geben Sie den Wert von $d$ an.



**Wahlteil Analysis.** Gegeben ist die Funktion $f$ mit

$$f(t) = \frac{2e^t}{e^t + 9}.$$

Diese beschreibt das Wachstum einer Sonnenblume. Dabei bezeichnet $t$ die Zeit in Monaten nach Beobachtungsbeginn und $f(t)$ die Höhe der Sonnenblume in Metern.

a) Berechnen Sie, um wie viele Zentimeter die Sonnenblume innerhalb der ersten zwei Monate wächst.

Berechnen Sie, wann die Sonnenblume eine Höhe von 1,5 m erreicht.

b) Ermitteln Sie anhand des Schaubilds, wann die Sonnenblume am stärksten wächst, und geben Sie einen Näherungswert für die maximale Wachstumsrate an.

c) Zeigen Sie, dass die Ableitung von $f$ gegeben ist durch

$$f'(t) = \frac{18e^t}{(e^t + 9)^2},$$

und weisen Sie nach, dass die Funktion $f$ streng monoton wächst.

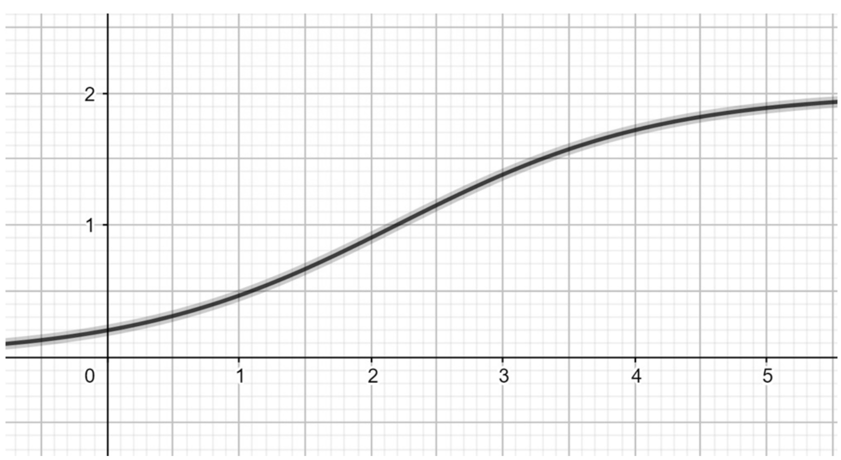
d) Interpretieren Sie die Gleichung $f(t+3) = f(t) + 1$ im Sachzusammenhang, und geben Sie mit Hilfe der Abbildung eine Lösung an.

e) Zeigen Sie, dass

$$F(t) = 2\ln(e^t + 9)$$

eine Stammfunktion von $f$ ist.

Berechnen Sie die mittlere Höhe der Sonnenblume während der ersten vier Monate nach Beobachtungsbeginn.



## Lösungen

(1) Es ist
$$f'(x) = \frac{\cos(2x)}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\sin(2x).$$

(2) Wir finden
$$\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{11-2x}}\,dx = -\sqrt{11-2x}\Big|_1^5 = -1+3 = 2.$$
Das Integral hat daher einen ganzzahligen Wert.

(3) Multiplikation mit $x$ liefert
$$0 = x^4 + 2x^2 - 8 = (x^2+4)(x^2-2).$$
Also sind $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ die einzigen Lösungen.

(9) Offensichtlich ist $84 \cdot 84$ eine Quadratzahl, daher auch $84 \cdot \frac{84}{4}$. Die kleinste positive ganze Zahl ist also 21.

(4) An den Asymptoten liest man ab, dass $b = 3$ und $c = 1$ ist. Einsetzen von $(1|0)$ liefert $a = 2$.

Das Schaubild von $g$ entsteht aus dem von $f$ durch Spiegeln an der $y$-Achse. Also gehört $g$ zu Abb. 2.

Das Schaubild von $h$ entsteht aus dem von $f$ durch Verschieben um $d$ in $x$-Richtung. Also gehört $h$ zu Abb. 3, und es ist $d = -6$.

**Wahlteil.** a) $f(2) - f(0) \approx 0{,}7$; die Sonnenblume wächst um etwa 0,7 m. (2 VP)

$f(t) = 1{,}5$ liefert $2e^t = 1{,}5(e^t + 9)$, also $0{,}5e^t = 13{,}5$. Daher ist $e^t = 27$, somit $t = \ln(27) \approx 3{,}3$: nach etwa 3,3 Monaten ist die Sonnenblume 1,5 m hoch. (2 VP)

b) Gesucht ist die $t$-Koordinate des Wendepunkts; diese ist $t \approx 2{,}2$. Die Wachstumsrate zu diesem Zeitpunkt ist etwa $f'(2{,}2) \approx 0{,}5$, also etwa 0,5 m pro Monat. (2 VP)

c)
$$f'(t) = 2e^t(e^t+9)^{-1} - 2e^t(e^t+9)^{-2}e^t = \frac{2e^t}{e^t+9} - \frac{2e^{2t}}{(e^t+9)^2} = \frac{2e^t}{e^t+9}\left(1 - \frac{e^t}{e^t+9}\right).$$
Weil der Bruch in der Klammer $< 1$ ist (Nenner größer als Zähler), ist $f'(t)$ positiv und damit $f$ streng monoton steigend.

Leichter mit

$$f'(t) = \frac{18e^t}{(e^t+9)^2},$$

denn hier sind Zähler und Nenner beide positiv. (3 VP)

d) Die Sonnenblume ist innerhalb von 3 Wochen (im Zeitraum $[t, t+3]$) um 1 m gewachsen. Die Lösung der Gleichung ist $t \approx 2$.

e) $F'(t) = \frac{2e^t}{e^t+9} = f(t)$.

$$M = \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)dt = \frac{1}{2}\ln(e^t+9)\big|_0^4 = \frac{1}{2}\ln(e^4+9) - \frac{1}{2}\ln 10 \approx 0{,}925.$$

Die mittlere Höhe beträgt also etwa 0,925 m. (3 VP)