K2 MATHEMATIK KLAUSUR 1

08.11.2019

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Punkte (max)	2	2	3	6	3	4	5	4	1
Punkte									

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktion:

$$f(x) = x \cdot e^{x^2+x} + x.$$

(2) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von

$$f(x) = 2(3-2x)^4$$

mit $F(2) = 1$.

(3) Lösen Sie die Gleichung

$$(\cos(x) + 1) \cdot \sqrt{e^x - 3} = 0$$

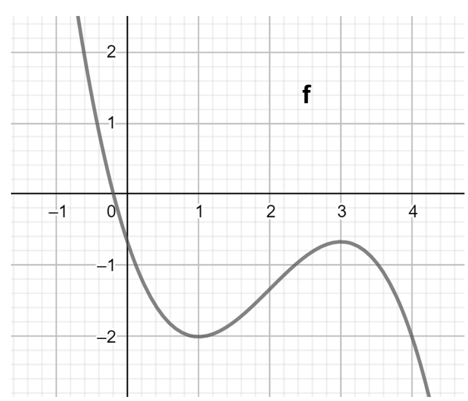
für $0 \leq x \leq 2\pi$.

(4) Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f. Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f.

a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

(1) Der Graph von F von f besitzt für $-1 \leq x \leq 4$ einen Tiefpunkt.
(2) Das Schaubild von F besitzt mindestens zwei Wendepunkte.
(3) Das Schaubild von f' besitzt in $x = 3$ eine waagrechte Tangente
(4) $f'(-f(4)) > 0$.

b) Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = x^2 \cdot f(x)$. Bestimmen Sie $g'(1)$.



(5) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Bestimmen Sie alle Punkte des Schaubilds von f, in denen die Tangente parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x + 3$ ist.

(6) Gegeben ist die Ebene $E : 3x_2 + 4x_3 = 12$.

a) Stellen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.

b) Die Ebene F entsteht durch Spiegelung von E an der x_1x_2-Ebene. Geben Sie eine Gleichung der Ebene F an.

(7) Gegeben sind die Punkte $P(5|4|3)$, $Q(1|3|-4)$ und $R(6|0|3)$, sowie die Gerade $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$. Die Punkte P und Q liegen auf der Geraden h.

a) Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h und ermitteln Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunkts.

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck PQR einen rechten Winkel in P besitzt.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, der das Dreieck PQR zu einem Rechteck ergänzt.

(8) Ein fairer Würfel wird dreimal geworfen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) dreimal die gleiche Augenzahl erscheint.

b) mindestens einmal eine Augenzahl größer als 4 kommt.

c) eine Zahl größer als 116 erscheint, wenn man die Ziffern in der gewürfelten Reihenfolge von links nach rechts aufschreibt.

(9) Finden Sie alle Darstellungen von 49 als Summe zweier Primzahlen.

Lösungen

(1) Es ist

$$f'(x) = e^{x^2+x} + x(2x+1)e^{x^2+x} + 1.$$

(2) Es ist

$$F(x) = -\frac{1}{5}(3-2x)^5 + c.$$

Daraus folgt

$$c = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

(3) Der Satz vom Nullprodukt liefert die beiden Gleichungen $\cos(x) = -1$ und $e^x - 3 = 0$. Daraus ergeben sich die Lösungen $x_1 = \pi$ und $x_2 = \ln 3$.

(4) (1) Aussage ist falsch, weil das Schaubild von f keine Nulstelle mit Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ besitzt.

(2) ist wahr, weil das Schaubild von f zwei Extrempunkte besitzt.

(3) Aussage ist falsch: Das Schaubild von f' besitzt in $x = 3$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, also keine waagrechte Tangente.

(4) Wegen $f(4) = -2$ ist $f'(-f(4)) = f'(2) > 0$, weil f in $x = 2$ streng monoton steigt. Die Aussage ist also wahr.

b) Die Produktregel ergibt $g'(x) = 2x \cdot f(x) + x^2 f'(x)$; also ist $g'(1) = 2f(1) + f'(1) = -2 + 0 = -2$.

(5) Es ist $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{1}{4}$. Wegschaffen der Nenner ergibt $4(x+1-x) = (x+1)^2$, also $x + 1 = \pm 2$ und damit $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$.

Die gesuchten Punkte sind also $(1|\frac{1}{2})$ und $(-3|-\frac{3}{2})$.

(6) Die Spurpunkte sind $S_2(0|4|0)$ und $S_3(0|0|3)$. Die Ebene ist parallel zur x_1-Achse.

Die an der x_1x_2-Ebene gespiegelte Ebene ist parallel zur x_1-Achse und hat die Spurpunkte $S_2(0|4|0)$ und $S_3'(0|0|-3)$. Die Gleichung ist $F: 3x_2 - 4x_3 = 12$.

(7) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$: Schneiden mit g liefert $s = t = \frac{1}{2}$ und den Schnittpunkt $S(3|3{,}5|-0{,}5)$.

b) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wegen $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$ hat das Dreieck in P einen rechten Winkel.

c) $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$ liefert

(8) Ein fairer Würfel wird dreimal geworfen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) $p = \frac{1}{36}$.

b) $p = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$.

c) Kleiner sind nur 111, …, 115, also ist $p = \frac{211}{216}$.

(9) $49 = 2 + 27$