LOGISTISCHES WACHSTUM

17. 03. 2020

Die Anzahl der bekannten Fälle von Corona-Infizierten in Frankreich seit dem 10. März ist gegeben durch die folgende Wertetabelle:

t	0	1	2	3	4	5	6
$B(t)$	1400	1770	2270	2860	3640	4470	5380

(t in Tagen seit dem 10. März).

a) Vergleiche die Anzahl der Infizierten mit den Werten der folgenden Funktion:

$$f(t) = \frac{13800}{1 + 8{,}87e^{-0{,}29t}}. \tag{1}$$

b) Wie viele Infizierte wird es am 17., 18., 19. und 20. März nach diesem Modell geben? Wie viele Neu-Infizierte wird es am 17. März geben?

c) Wie viele Infizierte wird es nach diesem Modell langfristig geben?

d) Zu welchem Zeitpunkt wird sich die Hälfte aller Personen, die sich infizieren werden, infiziert haben?

e) Zeige, dass die Funktion

$$f(t) = \frac{G}{1 + ae^{-kt}},$$

der folgenden Differentialgleichung genügt:

$$f'(t) = \frac{k}{G} \cdot f(t) \cdot (G - f(t)).$$

Dazu rechne man beide Seiten dieser Gleichung aus und zeige, dass die Ausdrücke äquivalent sind.

f) Bestimme den Wendepunkt des Schaubilds von f zuerst für

$$f(t) = \frac{G}{1 + ae^{-kt}},$$

und dann für die Funktion in (1).

Lösungen

a) Wir finden

t	0	1	2	3	4	5	6
$B(t)$	1400	1770	2270	2860	3640	4470	5380
$f(t)$	1400	1800	2300	2930	3650	4480	5400

Die Übereinstimmung ist während dieser Woche relativ gut.

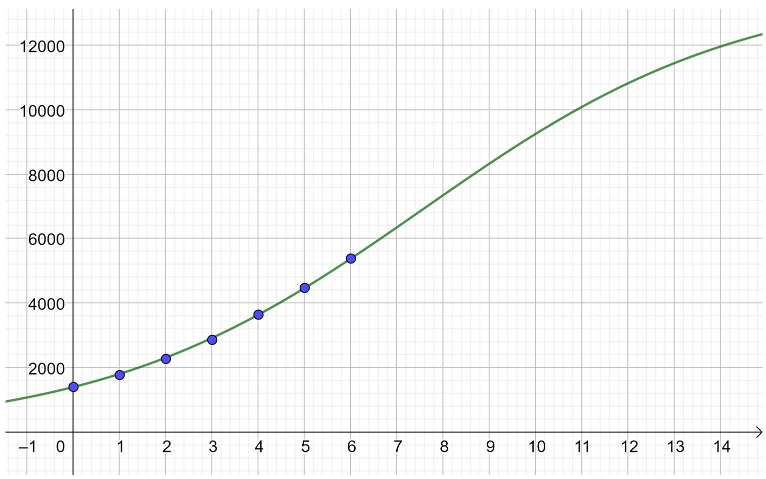

Abbildung 1. Bekannte Fälle in Frankreich

Abgesehen von der Tatsache, dass politische Entscheidungen und das Verhalten der Bevölkerung bei der Ausbreitung des Virus eine große Rolle spielen, dürfte der größte Unischerheitsfaktor darin liegen, dass vermutlich sehr viele Fälle von Infizierten gar nicht bekannt sind.

b) Für die nächsten Tage sagt das Modell folgende Zahlen voraus:

Datum	17.03	18.03	19.03	20.03	21.03
Zahl	6370	7370	8350	9270	10.100

Insbesondere wird es am 17. März etwa $6370 - 5380 = 990$ Neu-Infizierte geben.

c) Langfristig wird es 13800 Infizierte geben.

d) Um den Zeitpunkt auszurechnen, müssen wir $f(t) = \frac{G}{2}$ lösen:

$$\begin{aligned}
\frac{G}{1+ae^{-kt}} &= \frac{G}{2} && \Big| \cdot \frac{2(1+ae^{-kt})}{G} \\
2 &= 1 + ae^{-kt} && \Big| -1 \\
1 &= ae^{-kt} && \Big| : a \\
\frac{1}{a} &= e^{-kt} && \Big| \ln \\
-\ln a &= -kt && \Big| : (-k) \\
t &= \frac{\ln a}{k}
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir $\ln(\frac{1}{a}) = \ln(a^{-1}) = -\ln(a)$ benutzt.

Im Falle der Funktion (1) liefert dies wegen $a = 8{,}87$ und $k = 0{,}29$ den Zeitpunkt $t \approx 7{,}5$, also den 18. März.

d) Wir finden

$$f'(t) = \frac{akGe^{-kt}}{(1+ae^{-kt})^2} = \tfrac{k}{G} \cdot \frac{G}{1+ae^{-kt}} \cdot \frac{Gae^{-kt}}{1+ae^{-kt}}.$$

Zu zeigen ist also, dass

$$G - f(t) = \frac{Gae^{-kt}}{1+ae^{-kt}}$$

gilt. Wegheben des Nenners liefert

$$G(1+ae^{-kt}) - G = Gae^{-kt},$$

und dies folgt sofort durch Ausmultiplizieren.

e) Wir bilden die zweite Ableitung. Benutzen wir die Differentialgleichung, so folgt

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \tfrac{k}{G} \cdot f(t) \cdot (G - f(t)), \\
f''(t) &= \tfrac{k}{G} \cdot f'(t) \cdot (G - f(t)) + \tfrac{k}{G} \cdot f(t) \cdot (-f'(t)) \\
&= \tfrac{k}{G} \cdot f'(t) \cdot (G - 2 \cdot f(t)).
\end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichung gibt die t-Koordinate des Wendepunkts. Auflösen der letzten Klammer nach $f(t)$ (die andern Faktoren sind immer $\neq 0$) liefert

$$f(t) = \frac{G}{2}.$$

Der Wendepunkt ist also erreicht, wenn die Hälfte aller Personen, die sich infizieren werden, infiziert sind. Diesen Zeitpunkt haben wir oben bereits bestimmt.