LOGISTISCHES WACHSTUM

17. 03. 2020

Die Anzahl der bekannten Fälle von Corona-Infizierten in Deutschland seit dem 10. März ist gegeben durch die folgende Wertetabelle:

t	0	1	2	3	4	5	6
$B(t)$	1140	1300	1570	2370	3060	3800	4840

(t in Tagen seit dem 10. März).

a) Vergleiche die Anzahl der Infizierten mit den Werten der folgenden Funktion:

$$f(t) = \frac{48600}{1 + 41{,}4e^{-0{,}25t}}. \tag{1}$$

b) Wie viele Infizierte wird es am 17., 18., 19. und 20. März nach diesem Modell geben?

c) Wie viele Infizierte wird es nach diesem Modell langfristig geben?

d) Zu welchem Zeitpunkt wird sich die Hälfte aller Personen, die sich infizieren werden, infiziert haben?

e) Zeige, dass die Funktion

$$f(t) = \frac{G}{1 + ae^{-kt}},$$

der folgenden Differentialgleichung genügt:

$$f'(t) = \frac{k}{G} \cdot f(t) \cdot (G - f(t)).$$

Dazu rechne man beide Seiten dieser Gleichung aus und zeige, dass die Ausdrücke äquivalent sind.

f) Bestimme den Wendepunkt des Schaubilds von f zuerst für

$$f(t) = \frac{G}{1 + ae^{-Gkt}},$$

und dann für die Funktion in (1).

Lösungen

a) Wir finden

t	0	1	2	3	4	5	6
$B(t)$	1140	1300	1570	2370	3060	3800	4840
$f(t)$	1146	1460	1860	2360	2990	3780	4750

Die Übereinstimmung ist während dieser Woche relativ gut.

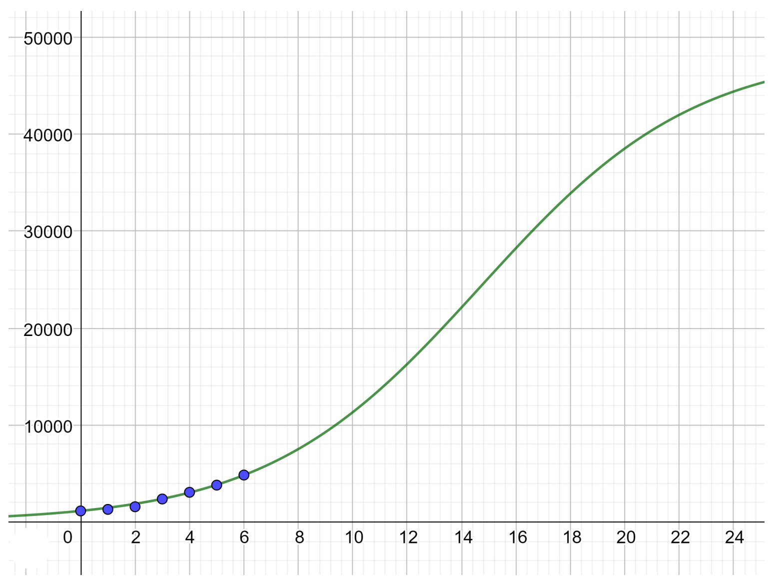

Abbildung 1. Bekannte Fälle in Deutschland

Abgesehen von der Tatsache, dass politische Entscheidungen und das Verhalten der Bevölkerung bei der Ausbreitung des Virus eine große Rolle spielen, dürfte der größte Unischerheitsfaktor darin liegen, dass vermutlich sehr viele Fälle von Infizierten gar nicht bekannt sind.

b) Für die nächsten Tage sagt das Modell folgende Zahlen voraus:

Datum	17.03	18.03	19.03	20.03	21.03
Zahl	5900	7360	9060	11.050	13.330

c) Langfristig wird es in Deutschland 48.600 Infizierte geben.

d) Um den Zeitpunkt auszurechnen, müssen wir $f(t) = \frac{G}{2}$ lösen:

$$\begin{aligned}
\frac{G}{1+ae^{-kt}} &= \frac{G}{2} && \Big| \cdot \frac{2(1+ae^{-kt})}{G} \\
2 &= 1 + ae^{-kt} && \Big| -1 \\
1 &= ae^{-kt} && \Big| : a \\
\frac{1}{a} &= e^{-kt} && \Big| \ln \\
-\ln a &= -kt && \Big| : (-k) \\
t &= \frac{\ln a}{k}
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir $\ln(\frac{1}{a}) = \ln(a^{-1}) = -\ln(a)$ benutzt.

Im Falle der Funktion (1) liefert dies wegen $a = 41{,}4$ und $k = 0{,}25$ den Zeitpunkt $t \approx 14{,}9$, also den 25. März.

d) Wir finden

$$f'(t) = \frac{akGe^{-kt}}{(1+ae^{-kt})^2} = \frac{k}{G} \cdot \frac{G}{1+ae^{-kt}} \cdot \frac{Gae^{-kt}}{1+ae^{-kt}}.$$

Zu zeigen ist also, dass

$$G - f(t) = \frac{Gae^{-kt}}{1+ae^{-kt}}$$

gilt. Wegheben des Nenners liefert

$$G(1+ae^{-kt}) - G = Gae^{-kt},$$

und dies folgt sofort durch Ausmultiplizieren.

e) Wir bilden die zweite Ableitung. Benutzen wir die Differentialgleichung, so folgt

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \tfrac{k}{G} \cdot f(t) \cdot (G - f(t)), \\
f''(t) &= \tfrac{k}{G} \cdot f'(t) \cdot (G - f(t)) + \tfrac{k}{G} \cdot f(t) \cdot (-f'(t)) \\
&= \tfrac{k}{G} \cdot f'(t) \cdot (G - 2 \cdot f(t)).
\end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichung gibt die t-Koordinate des Wendepunkts. Auflösen der letzten Klammer nach $f(t)$ (die andern Faktoren sind immer $\neq 0$) liefert

$$f(t) = \frac{G}{2}.$$

Der Wendepunkt ist also erreicht, wenn die Hälfte aller Personen, die sich infizieren werden, infiziert sind. Diesen Zeitpunkt haben wir oben bereits bestimmt.