PFLICHTTEIL

F. LEMMERMEYER

Analysis

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

(1) Bestimmen Sie Definitionsbereich, Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Asymptoten, sowie Extrem- und Wendepunkte des Schaubilds von f. Geben Sie den Wertebereich von f an.

(2) Der Punkt A sei der Schnittpunkt des Schaubilds von f mit der x-Achse, B der Wendepunkt mit positiver x-Koordinate. Der Punkt C liege auf dem Schaubild von f zwischen A und B. Bestimme C so, dass die Fläche des Dreiecks ABC maximal wird.

(3) Geben Sie eine Stammfunktion von f an.

(4) Der Graph von $f(x)$ schließt zusammen mit der positiven x-Achse und der Geraden $x = \sqrt{3}$ im ersten Quadranten ein Flächenstück F ein. Das Flächenstück F soll von der Geraden $x = q$ halbiert werden. Wie ist q zu wählen?

Hinweise

a) Wertebereich: alle vorkommenden Funktionswerte. Die kann man an den Extrempunkten ablesen.

b) Berechne die Steigung m der Geraden durch AB. Damit C maximalen Abstand von AB hat, muss $f'(x) = m$ sein.

c) Hier muss man raten. Hinweis: es ist eine Logarithmusfunktion.

d) Dies läuft auf die Gleichung

$$2 \cdot \int_0^q f(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx$$

hinaus.

Geometrie 1

Gegeben sind die drei Punkte $A(4|14|17)$, $B(16|11|14)$ und $C(16|2|23)$, sowie der Punkt $U(-10|4|16)$.

(1) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig ist.

(2) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D, der das Dreieck ABC zu einem Quadrat ABCD ergänzt.

(3) Geben Sie die Koordinaten des Quadratmittelpunktes M an.

(4) Ein Lichtstrahl geht von U aus und wird im Punkt M an der Quadratebene reflektiert. Unter welchem Winkel trifft er auf die Ebene?

(5) Der gespiegelte Lichtstrahl trifft im Punkt Z auf der x_1x_2-Ebene auf. Bestimmen Sie die Koordinaten von Z.

(6) Eine gerade quadratische Pyramide mit dem Volumen $V = 324$ wird über dem Quadrat ABCD errichtet. Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze S dieser Pyramide Es sind alle möglichen Lösungen zu berechnen.

Geometrie 2

Die drei Punkte $A(6|4|5)$, $B(9|24|9)$ und $C(12|8|4)$ bilden die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S.

(1) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene durch A, B und C.

(2) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

(3) Die Spitze S der Pyramide mit Volumen 36 liegt auf der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Lösungen

Analysis

(1) Definitionsbereich ist die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Das Schaubild von f ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs wegen

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x).$$

Nullstellen: $f(x) = 0$ liefert $x = 0$. Also ist $S(0|0)$ der einzige Schnittpunkt mit den Koordinatenachsen.

Senkrechte Asymptoten gibt es nicht wegen $x^2 + 1 \neq 0$; waagrechte Asymptote ist $y = 0$ wegen

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \longrightarrow 0.$$

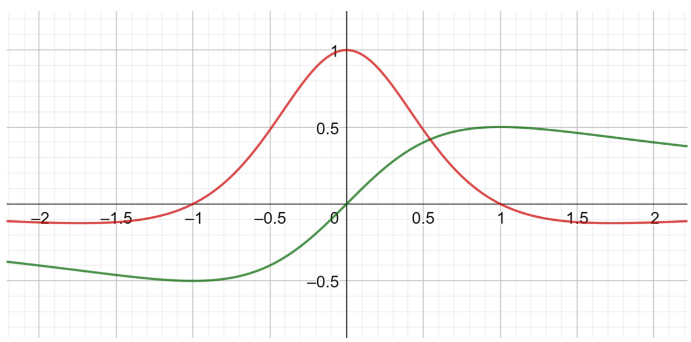

Abbildung 1. Schaubild von f (grün) und f' (rot).

Extrem- und Wendepunkte:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

$$f''(x) = \frac{2x^3-6x}{((x^2+1)^3}$$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$ ergibt $x = \pm 1$.

- $f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f''(-1) = \frac{1}{2} > 0$, also $T(-1| -\frac{1}{2})$.
- $f(1) = \frac{1}{2}$, $f''(1) = -\frac{1}{2} < 0$, also $H(1|\frac{1}{2})$.

Wendepunkte: $f''(x) = 0$ ergibt $x^3 - 3x = x(x^2-3) = 0$, also $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$. Wir erhalten die Wendepunkte $W_1(-\sqrt{3}|-\frac{\sqrt{3}}{4})$, $W_2(0|0)$ und $W_3(\sqrt{3}|\frac{\sqrt{3}}{4})$,

Wertebereich: nach der Berechnung von Hoch- und Tiefpunkten und weil $y = 0$ waagrechte Asymptote ist, ist der Wertebereich $W_f = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(2) Variante A: Wegen $A(0|0)$, $B(\sqrt{3}|\frac{\sqrt{3}}{4})$ und $C(u|f(u))$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC gleich der Länge des Kreuzprodukts der beiden („dreidimensional gemachten") Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3}/4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} u \\ \frac{u}{u^2+1} \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir finden

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix}$$

mit

$$F = \sqrt{3} \cdot \frac{u}{u^2+1} - \frac{\sqrt{3} \cdot u}{4}.$$

Damit der Flächeninhalt maximal wird, muss $F'(u) = 0$ gelten. Division durch $\sqrt{3}$ liefert die Gleichung $f'(u) = \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} \frac{1-u^2}{(u^2+1)^2} &= \frac{1}{4} \\ 4(1-u^2) &= (u^2+1)^2 \\ 4 - 4u^2 &= u^4 + 2u^2 + 1 \\ 0 &= u^4 + 6u^2 - 3 \\ u_{1,2}^2 &= \frac{-6 \pm \sqrt{48}}{2} = -3 \pm \sqrt{12} \end{aligned}$$

Also ist $u_{1,2} = \pm\sqrt{-3+\sqrt{12}} \approx \pm 0{,}68$. Wegen $u > 0$ gilt die positive Lösung.

Variante 2: Maximaler Flächeninhalt liegt vor, wenn die Tangente in C parallel zur Geraden durch A und B ist. Wegen $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$ läuft dies auf $f'(u) = \frac{1}{4}$ hinaus, also auf dieselbe Gleichung wie oben.

(3) Die ableitung von $G(x) = \ln(x^2+1)$ ist $G'(X) = \frac{2x}{x^2+1}$. Also ist $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ eine Stammfunktion von f.

(4) Die Gesamtfläche ist

$$F = \int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx = F(\sqrt{3}) - F(0) = \frac{1}{2}\ln(4) - \frac{1}{2}\ln(1) = \ln(2)$$

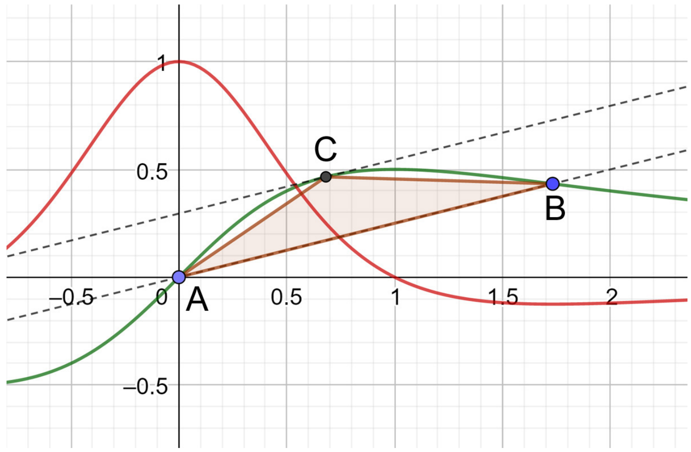

Abbildung 2. Dreieck ABC mit maximalem Flächeninhalt

wegen $\frac{1}{2}\ln 4) = \ln(4^{\frac{1}{2}}) = \ln(2)$.

Jetzt muss man q so bestimmen, dass

$$\int_0^q f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln(2)$$

wird:

$$\begin{aligned} F(q) - F(0) &= \frac{1}{2}\ln(2) \\ \frac{1}{2}\ln(q^2+1) &= \frac{1}{2}\ln(2) \\ \ln(q^2+1) &= \ln(2) \\ q^2+1 &= 2 \end{aligned}$$

und damit $q = 1$ (positive Lösung, da $x > 0$).

Geometrie 1

(1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}$. Wegen $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{162} = \sqrt{2 \cdot 81} = 9\sqrt{2}$ ist das Dreieck gleichschenklig. Weiter ist $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, also das Dreieck rechtwinklig in B.

Eine Skizze zeigt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, was auf $D(4|5|26)$ führt.

(2) Mittelpunkt des Rechtecks ist $M_{AC}(10|8|20)$. Kontrolle mit M_{BD}!

(3) Ebene ABCD:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Multiplikation der Parametrgleichung mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ liefert die Ebenengleichung

$$E : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 66.$$

Winkel α zwischen Gerade MU und Ebene: $\overrightarrow{UM} = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also

$$\sin\alpha = \frac{9}{\sqrt{27} \cdot 3}, \qquad \alpha \approx 35{,}3^\circ.$$

Variante 2: Berechne den Lotfußpunkt L von U und dann den Winkel zwischen den beiden Vektoren $\overrightarrow{MU}$ und $\overrightarrow{ML}$. Den Lotfußpunkt brauchen wir zum Spiegeln der Geraden ohnehin.

Lotgerade durch U mit Richtungsvektor $\vec{n}$:

$$\ell : \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schneiden mit E:

$$(-10 + t) + 2(4 + 2t) + 2(16 + 2t) = 66 \quad \text{ergibt} \quad t = 4.$$

also ist $L(-6|12|24)$.

Damit ist $\overrightarrow{MU} = \begin{pmatrix} -20 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{ML} = \begin{pmatrix} -16 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Also ist

$$\cos\alpha = \frac{18}{\sqrt{27} \cdot \sqrt{18}}$$

und damit wieder $\alpha \approx 35{,}3^\circ$.

(4) Wir müssen die Gerade MU and E spiegeln und dann mit der x_1x_2-Ebene schneiden.

Spiegeln von U an L:

$$\overrightarrow{OU'} = \overrightarrow{OU} + 2\overrightarrow{UL} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 20 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

Die gespiegelte gerade geht durch U' und M und hat daher die Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix} + te\begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

oder besser

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schneiden mit der x_1x_2-Ebene, also $x_3 = 0$ setzen, ergibt $u = -20$ und damit $Z(30|-12|0)$.

(5) Die spitze liegt auf der Lotegeraden durch M, also auf

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Grundfläche der Pyramide ist das Quadrat ABCD; dessen Flächeninhalt ist $G = |\overrightarrow{AB}|^2 = 162$. Wegen $324 = \frac{1}{3}Gh$ muss die Höhe h der Pyramide gleich $h = 6$ sein.

Die Höhe von S über der Grundfläche bestimmt man mit der HNF von E:

$$\frac{x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 66}{3} = 0.$$

Einsetzen von S ergibt

$$6 = \frac{|10 + t + 16 + 4t + 40 + 4t - 66|}{3} = \frac{|9t|}{3},$$

also $|3t| = 6$ und damit $t = \pm 2$. Einsetzen ergibt $S_1(8|4|16)$ und $S_2(12|12|24)$.

Geometrie 2

(1) Ebene durch ABC:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Normalenvektor:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ 27 \\ -108 \end{pmatrix} = -9\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Also hat E die gleichung

$$4x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 72.$$

Die drei Punkte $A(6|4|5)$, $B(9|24|9)$ und $C(12|8|4)$ bilden die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S.

(2) Den Flächeninhalt bestimmt man am einfachsten mit Hilfe des Kreuzprodukts der beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$: dessen Länge ist der Flächeninhalt des von diesen beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms. Also ist

$$F = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} = \frac{117}{2}.$$

(3) Wegen $36 = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3} \cdot \frac{117}{2}h = \frac{39h}{2}$ folgt $h = \frac{24}{13}$.

Den Abstand von S zur Ebene bestimmen wir mit der HNF von E:

$$\frac{4x_1 - 3x_2 + 12x_3 - 72}{13} = 0.$$

Einsetzen eines laufenden Punkts auf g ergibt

$$\frac{24}{13} = \frac{|24 + 24t - 12 - 12t + 60 + 12t - 72|}{13} = \frac{|24t|}{13}.$$

Also ist $t = \pm 1$ und damit $S_1(0|0|4)$ und $S_2(12|8|6)$.