PFLICHTTEIL

F. LEMMERMEYER

(1) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$.

a) Bestimme die Schnittpunkte des Schaubilds von f mit den Koordinatenachsen.

b) Bestimme die Asymptoten des Schaubilds von f.

c) Bestimme Extrem- und Wendepunkte des Schaubilds von f.

d) Zeige, dass die Tangenten an das Schaubild von f in $x = -1$ und $x = 1$ senkrecht aufeinander stehen, und berechne die x-Koordinate ihres Schnittpunkts.

e) Bestimme die reellen Parameter a und b so, dass

$$F(x) = \frac{ax + b}{e^x}$$

eine Stammfunktion von f ist.

f) Das Schaubild von f begrenzt im 2. Quadranten ein Flächenstück mit den Koordinatenachsen. Berechne dessen Inhalt.

(2) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{4-x}}.$$

a) Zeige, dass f für alle x mit $2 \leq x < 4$ definiert ist.

b) Bestimme die senkrechte Asymptote des Schaubilds von f.

c) Löse die Gleichung $y = \sqrt{\frac{x-2}{4-x}}$ nach x auf.

d) An welchen Stellen hat f Funktionswert 1?

e) Bestimme die erste Ableitung von f und weise nach, dass die folgende Gleichung gilt:

$$f'(x) \cdot f(x) = \frac{1}{(4-x)^2}. \tag{1}$$

Hinweis: Setze f und f' ein und zeige, dass beide Seiten gleich sind.

f) Bestimme die Nullstellen von f. Warum ist dies kein Widerspruch zu (1)?

g) Zeige, dass das Schaubild von f keine Stellen mit waagrechter Tangente und daher auch keine Hoch- oder Tiefpunkte besitzt.

h) Zeige, dass $G(x) = -x - 2\ln(4-x)$ eine Stammfunktion von $g(x) = (f(x))^2 = \frac{x-2}{4-x}$ ist.

i) Das Schaubild von f rotiert im Intervall $[2;3]$ um die x-Achse. Berechne das Volumen des Rotationskörpers mit Hilfe der Formel

$$V = \pi \int_2^3 (f(x))^2 \, dx.$$

(3) In einer Urne 1 befinden sich 3 schwarze und k weiße Kugeln. In Urne 2 befinden sich 2 schwarze und ebenfalls k weiße Kugeln. Es werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. A bezeichnet das Ereignis, dass genau eine Kugel schwarz ist.

a) Berechne $p_1(A)$ beim Ziehen aus der Urne 1.

b) Berechne $p_2(A)$ beim Ziehen aus der Urne 2.

c) Wie groß muss k sein, damit $p_1(A) = \frac{4}{9}$ ist?

d) Für welches k ist $p_1(A)$ maximal?

e) Welche Bedingung muss k erfüllen, damit $p_1(A) > p_2(A)$ ist?

Hinweise

(1) a) Man muss $f(0)$ berechnen und $f(x) = 0$ lösen.

b) sollte kein Problem sein. Es gibt nur eine linksseitige waagrechte Asymptote.

c) $f'(x) = -\frac{x}{e^x}$, $f''(x) = \frac{x-1}{e^x}$; $H(0|1)$; $W(1|\frac{2}{e})$

d) Tangenten sind $y = ex + e$ und $y = -\frac{1}{e}x + \frac{3}{e}$; senkrecht wegen $m_1 \cdot m_2 = e \cdot (-\frac{1}{e}) = -1$; Schnittpunkt bei $x = \frac{3-e^2}{e^2+1}$.

e) $a = -1$, $b = -2$.

f) Das Flächenstück geht von $x = -1$ (Nullstelle) bis $x = 0$ (y-Achse); $A = e - 2$.

(2) a) Zu zeigen ist, dass der Ausdruck unter der Wurzel für diese Werte von x nicht negativ ist. Dazu zeigt man, dass der Zähler ≥ 0 und der Nenner > 0 ist.

b) $x = 4$.

c) $x = \frac{2+4y^2}{1+y^2}$.

d) Setze $y = 1$ in c).

e) $f'(x) = \sqrt{\frac{4-x}{x-2}} \cdot \frac{1}{(4-x)^2}$.

f) $x = 2$. Aus der Gleichung (1) scheint zu folgen, dass $f(x) \neq 0$ ist. Allerdings ist die Gleichung (1) für $x = 2$ gar nicht definiert.

g) folgt aber aus (1).

h) Ableitung und gleich $g(x)$ setzen.

(3) a) $p_1(A) = p(sww) + p(wsw) + p(wws) = \frac{9k^2}{(k+3)^2}$.

b) $p_1(A) = \frac{6k^2}{(k+2)^2}$.

c) Löse $\frac{9k^2}{(k+3)^2} = \frac{4}{9}$ (notfalls durch Probieren; aus $81k^2 = 4(k+3)^3$ kann man aber ablesen, dass $k + 3$ eine Quadratzahl sein muss).

d) Ableiten und Nullsetzen ($k = 6$)

e) Eine üble Rechnung mit dritten Wurzeln; ich komme auf $k \geq 5$.

(1) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$.

a) $f(0) = 1$ gibt $S(0|1)$. $f(x) = 0$ gibt wegen $e^x \neq 0$ die einzige Nullstelle $x_1 = -1$ und damit den Schnittpunkt $N(-1|0)$.

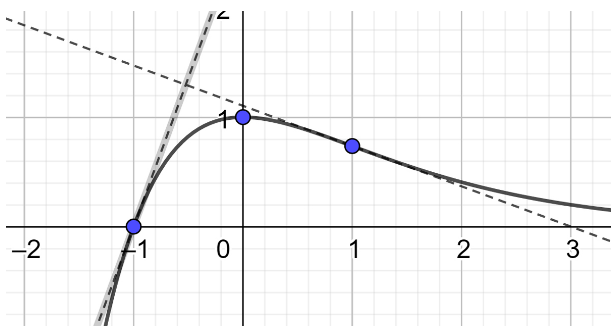
b) Exponentialfunktionen haben eine einseitige waagrechte Asymptote. Im vorliegenden Fall ist $y = 0$ rechtsseitige Asymptote.

c) Wir haben $f(x) = (x+1)e^{-x}$, also

$$f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} - xe^{-x},$$
$$f''(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x}.$$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$ liefert $x = 0$; $f''(0) = -1 < 0$, also $H(0|1)$.

Wendepunkte: $f''(x) = 0$ liefert $x = 1$ und damit $W(1|\frac{2}{e})$.



d) Wir haben $m_1 = f'(-1) = e$ und $m_2 = f'(1) = -\frac{1}{e}$; wegen $m_1 m_2 = -1$ stehen die Tangenten senkrecht aufeinander.

Die Gleichungen der Tangenten sind $t_1 : y = e(x+1)$ und $t_2 : y = -\frac{1}{e}(x-1) + \frac{2}{e}$. Schneiden ergibt $ex + e = -\frac{1}{e}x + \frac{3}{e}$, was auf

$$x = \frac{\frac{3}{e} - e}{e + \frac{1}{e}} = \frac{3 - e^2}{1 + e^2}$$

führt. Daraus folgt dann

$$y = e(x+1) = e \cdot \Big(\frac{3 - e^2}{1 + e^2} + \frac{1 + e^2}{1 + e^2}\Big) = \frac{4e}{1 + e^2}.$$

e) Mit $F(x) = (ax + b)e^{-x}$ finden wir

$$F'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x} = (a - b - ax)e^{-x}.$$

Aus $F'(x) = f(x) = (1 + x)e^{-x}$ folgt $a = -1$ und $b = -2$. Also ist $F(x) = -(x+2)e^{-x}$.

f) Offenbar ist der Flächeninhalt gleich

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-1}^{0} = -2 - (-e) = e - 2.$$

(2) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{4-x}}.$$

a) Ist $2 \le x < 4$, dann ist $x - 2 \ge 0$ und $4 - x > 0$; also ist $\frac{x-2}{4-x} \ge 0$ und f definiert.

b) Die senkrechte Asymptote ist $x = 4$.

c) Wir finden

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{x-2}{4-x}} \\ y^2 &= \frac{x-2}{4-x} \\ (4-x)y^2 &= x - 2 \\ 4y^2 - xy^2 &= x - 24y^2 + 2 && = x + xy^2 = x(1+y^2) \\ x &= \frac{4y^2+2}{y^2+1} \end{aligned}$$

d) Setzt man $y = 1$ in die letzte Gleichung ein, erhält man $x = \frac{6}{2} = 3$.

e) Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{2f(x)} \cdot \frac{2}{(4-x)^2} = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{(4-x)^2},$$

also $f'(x) \cdot f(x) = \frac{1}{(4-x)^2}$.

f) $f(x) = 0$ führt auf $\frac{x-2}{4-x} = 0$ und damit auf $x = 2$. Gleichung (1) sagt $f'(x)f(x) = \frac{1}{(4-x)^2}$, also $f'(2)f(2) = \frac{1}{4}$. Trotzdem ist $f(2) = 0$, und dies ist kein Widerspruch, weil $f'(2) = \infty$ unendlich groß wird.

g) Aus $f'(x) = 0$ folgt $\frac{1}{(4-x)^2} = 0$, und diese Gleichung hat keine Lösung. Also gibt es keine Stellen mit waagrechter Tangente.

h) Mit $G(x) = -x - 2\ln(4-x)$ findet man

$$G'(x) = -1 - \frac{2}{4-x} \cdot (-1) = -\frac{4-x}{4-x} + \frac{2}{4-x} = \frac{x-2}{4-x}.$$

i) Wir erhalten

$$V = \pi \int_2^3 (f(x))^2 \, dx = \pi(G(3) - G(2)) = \pi(-3 + 2 + 2\ln(2)) = (2\ln(2) - 1)\pi.$$

(3) a) Es ist $p_1(A) = p(wws) + p(wsw) + p(sww) = 3p(wws) = \frac{9k^2}{(k+3)^3}$.

b) Hier ist $p_2(A) = \frac{6k^2}{(k+2)^3}$.

c) $\frac{9k^2}{(k+3)^3} = \frac{4}{9}$ liefert $k = 6$.

d) Die Ableitung von $p_1(A) = 9k^2(k+3)^{-3}$ gleich 0 setzen:

$$p_1(A)' = 18k(k+3)^{-3} - 27k^2(k+3)^{-4} = 0$$

liefert $18k(k+3) - 27k^2 = 0$, also $k = 0$ oder $k = 6$. Weil für $k = 0$ $p_1(A) = 0$ minimal ist, muss das Maximum bei $k = 6$ liegen.

e) Wir finden

$$\begin{aligned} p_1(A) &> p_2(A) \\ \frac{9k^2}{(k+3)^3} &> \frac{6k^2}{(k+2)^3} \\ 9k^2(k+2)^3 &> 6k^2(k+3)^3 \\ (k+2)^3 &> \frac{2}{3} \cdot \big(k+3\big)^3 \\ k+2 &> \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \big(k+3\big) \\ k\left(1 - \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) &> 3\sqrt[3]{\frac{2}{3}} - 2 \end{aligned}$$

Für $k = 4$ ist diese Ungleichung falsch, ab $k = 5$ richtig.