K2 MATHEMATIK KLAUSUR 2

12.12.2018

Aufgabe	1	2	3	4	5	9
Punkte (max)	2	2	2	4	4	1
Punkte						

Wahlteil A	a	b	c	d
Punkte (max)	4	5	3	3
Punkte				

Wahlteil B	6	7a	b	c
Punkte (max)	7	4	1	3
Punkte				

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit
$$f(x) = \frac{2}{x} \cdot e^{-5x}.$$

(2) Weisen Sie nach, dass
$$\int_2^8 \sqrt{2x}\; dx < 20$$
ist.

(3) Lösen Sie die Gleichung
$$(\cos(2x))^2 = 3\cos(2x)$$
für $0 \leq x \leq \pi$.

(4) Untersuchen Sie die Funktion
$$f(x) = 4 + \frac{3}{x^2 - 1}$$
auf Nullstellen und Symmetrie, und geben Sie alle Asymptoten an.

(5) Die folgenden Abbildungen zeigen die Schaubilder einer Funktion f, die durch

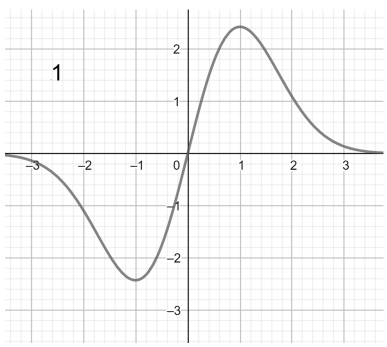
$$f(x) = 4xe^{-0,5x^2}$$

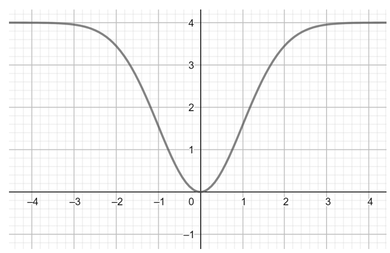
gegeben ist, ihrer Ableitung, und der Integralfunktion $I(x) = \int_0^x f(t)dt$.

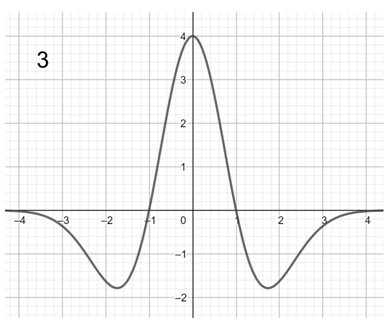
(a) Begründen Sie, dass Abbildung 1 zu f gehört.

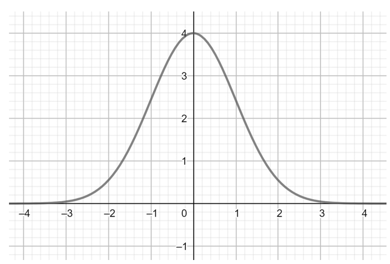
(b) Welche Schaubilder gehören zu den Funktionen f' und I? Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

(c) Geben Sie einen Funktionsterm für die Funktion g an, welche im verbliebenen Schaubild angezeigt wird.









(9) Susi kauft drei Taschen. Die zweite kostet 40 Euro mehr, die dritte 65 Euro mehr als die erste. Insgesamt gibt sie 300 Euro für die Schnäppchen aus. Wieviel kosten die einzelnen Taschen?

Wahlteil A

In 3000 m Höhe springt ein Fallschirmspringer aus einem Flugzeug. Solange sein Fallschirm noch geschlossen ist, kann seine Fallgeschwindigkeit näherungsweise beschrieben werden mit

$$v(t) = 49(1 - e^{-0,2\cdot t}).$$

(t in Sekunden nach dem Absprung, $v(t)$ in Meter pro Sekdunde).

(a) Bestimmen Sie die Fallgeschwindigkeit des Springers 10 Sekunden nach dem Absprung.

Wann erreicht er eine Fallgeschwindigkeit von 20 m/s?

Berechnen Sie die mittlere Fallgeschwindigkeit während der ersten 10 Sekunden.

(b) Bestimmen Sie einen integralfreien Funktionsterm, der die Höhe des Springers zum Zeitpunkt t beschreibt.

Der Springer öffnet seinen Fallschirm in 700 m Höhe. Weisen Sie nach, dass dies etwa 52 Sekunden nach dem Sprung der Fall ist.

Wie groß ist seine Fallgeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt?

(c) Ein zweiter Fallschirmspringer springt fünf Sekunden nach dem ersten ebenfalls aus 3000 m Höhe. Die abgebildeten Graphen stellen die Situation für beide Springer dar.

Deuten Sie den Inhalt der markierten Fläche im Sachzusammenhang.

Untersuchen Sie anhand der Abbildung, ob es im dargestellten Zeitraum nach dem Absprung des zweiten Springers einen Zeitpunkt gibt, zu dem die Springer die gleiche Höhe haben.

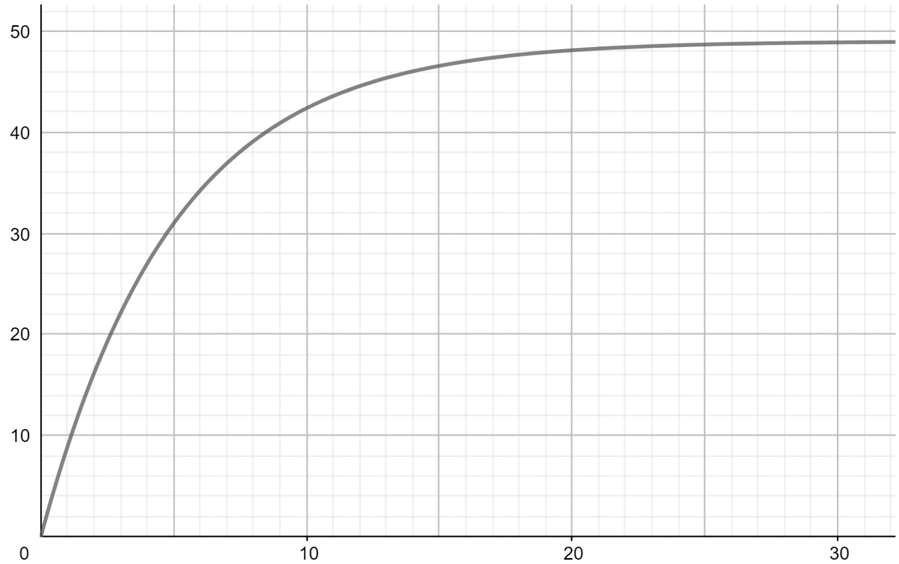
(d) Die Fallgeschwindigkeit des zweiten Springers kann näherungsweise durch eine Funktion w beschrieben werden mit

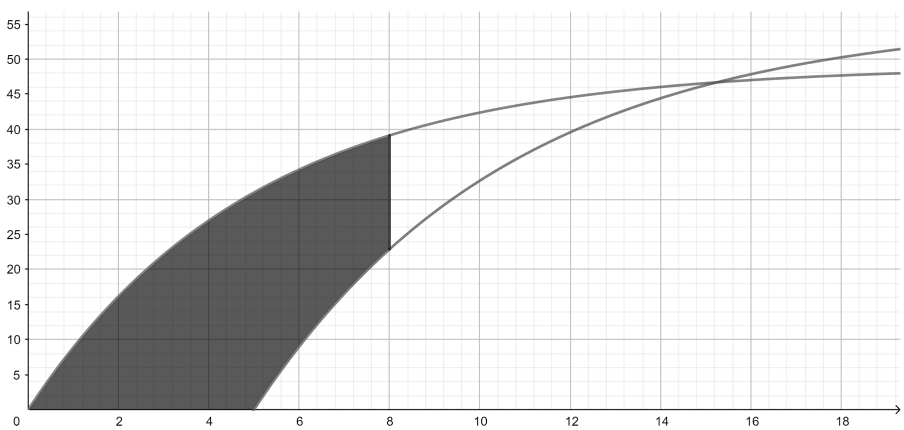
$$w(u) = 56 \cdot (1 - e^{-0,175u})$$

(u in Sekunden nach dem Absprung des zweite Springers; $w(u)$ in Meter pro Sekunde).

Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit des zweiten Springers unterhalb von 56 m/s bleibt.

Geben Sie eine Gleichung an, mit deren Hilfe man den Zeitpunkt bestimmen kann, an dem die Fallgeschwindigkeit des ersten Springers doppelt so hoch ist wie die des zweiten Springers.


50
40
30
20
10
0
10
20
30


55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18

Wahlteil B

6. Beschreiben Sie, wie das Schaubild von

$$f(x) = 3\cos(0,5x) - 5$$

aus dem Schaubild von $g(x) = \cos(x)$ hervorgeht.

Geben Sie (ohne Rechnung) je einen Hoch-, Tief- und Wendepunkt von f an.

Welche Aussagen über die Nullstellen von f und die Symmetrie des Schaubilds von f kann man treffen? Begründen Sie Ihre Aussagen.

7. Für jedes $t > 0$ ist die Funktion $f_t(x)$ gegeben durch

$$f_t(x) = x \cdot e^{-tx}.$$

a) Bestimmen Sie Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte des Schaubilds von f_1.

b) Gibt es einen Punkt, der auf allen Schaubildern der Funktionenschar liegt? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunkts von f_t und bestimmen Sie die Ortskurve der Extrempunkte,

---

Bearbeiten Sie den Pflichtteil ohne Taschenrechner, und dann **entweder** Wahlteil A **oder** Wahlteil B.

Mittelwert M einer Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ ist definiert durch

$$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Lösungen

(1)

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}e^{-5x} - \frac{10}{x}e^{-5x}.$$

(2) Es ist

$$\int_2^8 \sqrt{2x}\ dx = \frac{1}{3}\sqrt{2x}^3\Big|_2^6 = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3} < 20.$$

(3) Ausklammern:

$$\cos(2x)(\cos(2x) - 3) = 0$$

liefert $x_1 = \frac{\pi}{4}$ und $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ Als Nullstellen des ersten Faktors; der zweite wird nie 0.

(4) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = 4 + \frac{3}{x^2 - 1}$$

auf Nullstellen und Symmetrie, und geben Sie alle Asymptoten an.

(5) Die folgenden Abbildungen zeigen die Schaubilder einer Funktion f, die durch

$$f(x) = 4xe^{-0,5x^2}$$

gegeben ist, ihrer Ableitung, und der Integralfunktion $I(x) = \int_0^x f(t)dt$.

(a) Begründen Sie, dass Abbildung 1 zu f gehört.

(b) Welche Schaubilder gehören zu den Funktionen f' und I? Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

(c) Geben Sie einen Funktionsterm für die Funktion g an, welche im verbliebenen Schaubild angezeigt wird.

(9) $x + (x + 40) + (x + 65) = 300$ liefert $x = 65$, also kosten die Taschen 65, 105 und 130 Euro.

Wahlteil A

$$v(t) = 49(1 - e^{-0,2\cdot t}).$$

(a) $v(10) \approx 42,4$: Die Geschwindigkeit beträgt ca. 42,4 km/h.

$v(t) = 20$ liefert $t \approx 2,6$: Dies ist etwa 2,6 Sekunden nach Absprung der Fall.

$$\frac{1}{20}\int_0^{20} v(t)\,dt \approx 37.$$

Es sind also ca. 37 km/h.

(b) Die Funktion h ist gegeben durch

$$\begin{aligned} h(t) &= 3000 - \int_0^t v(x)\,dx = 3000 - (49x + 245e^{-0,2t})\Big|_0^t \\ &= 3000 - 49t - 5e^{-0,2t} + 245 = 3245 - 49t - 245e^{-0,2t}. \end{aligned}$$

Wegen $h(52) \approx 697$ ist dies der Fall. Seine Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt ist $v(52) \approx 49$ km/h.

(c) Die Fläche entspricht dem Höhenunterschied der beiden Springer 98 Sekunden nach dem Absprung des ersten Springers.

Die Fläche zwischen den Schaubildern im hinteren Bereich ist viel kleiner als die bis zum ersten Schnittpunkt. Es gibt also keinen solchen Zeitpunkt.

(d) Es ist $v(t) = 56 - 56e^{-0,175u} - 56$, weil die Exponentialfunktion nur positive Werte annimmt.

Die Geschwindigkeit des zweiten Springers zum Zeitpunkt t ist $w(t-5)$ für $t \geq 5$. Also lautet die Gleichung $v(t) = 2w(t-5)$.