K2 MATHEMATIK

17.03.2020

Pflichtteil

(1) Bestimme Sie die erste Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = (1 + 2x^2) \cdot e^{-x}$$

(2) Zeigen Sie, dass

$$F(x) = (1 + 2x)e^{-x}$$

eine Stammfunktion von

$$f(x) = (1 - 2x)e^{-x}$$

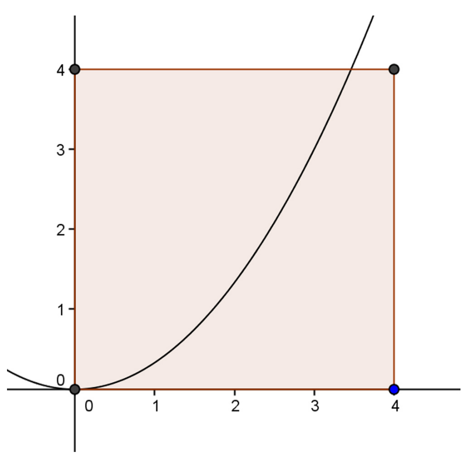
ist, und bestimmen Sie das Integral

$$\int_{-0{,}5}^{0} f(x)\,dx$$

(3) Bestimmen Sie Nullstellen, Extrempunkte und die Asymptoten des Schaubilds von

$$f(x) = \frac{4x - 2}{x^2}$$

(4) Ein Quadrat der Seitenlänge 4 wird von dem Schaubild einer Parabel $f(x) = ax^2$ in zwei gleich große Flächen eingeteilt. Bestimmen Sie a.



(5) Von einer Funktion g weiß man $g(2) = 3$, $g'(2) = 2$, $g''(2) = 0$ und $g'''(2) \neq 0$.

Welche Aussagen über das Schaubild von g kann man damit machen?

Skizzieren Sie ein mögliches Schaubild.

(6) Gegeben sind die drei Punkte $A(2|1|-4)$, $B(6|1|-12)$ und $C(0|1|0)$.

a) Weise nach, dass der Punkt C auf der Geraden AB, nicht aber auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt.

b) Auf der Strecke $\overline{AB}$ gibt es einen Punkt D, der von B dreimal so weit entfernt ist wie von A.

Bestimmen Sie die Koordinaten von D.

(7) Gegeben ist die Ebene $E : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

a) Der Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse und der Ursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

b) Ermitteln Sie die Koordinten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch Ortsvektor eines Punktes der Ebene E ist.

(8) Ein Glücksrad hat drei Sektoren, einen blauen, einen gelben und einen roten. Diese sind unterschiedlich groß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der blaue Sektor getroffen wird, ist p.

a) Interpretiere den Term $(1-p)^7$ im Sachzusammenhang.

b) Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass der blaue Sektor genau zweimal getroffen wird.

c) Das Glücksrad wird viermal gedreht und die Abfolge der Farben als Ergebnis notiert. Bestimme die Anzahl der möglichen Ergebnisse, in denen die Farbe Blau nicht vorkommt.

Wahlteil Analysis

Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden einmalig 20 mg eines Medikamentes direkt in die Blutbahn eines Patienten gespritzt. Die im Blut vorhandene Medikamentenmenge (in mg) kann näherungsweise durch die Exponentialfunktion f mit

$$f(t) = 20e^{-0{,}1054t}$$

beschrieben werden (t misst die Zeit in Minuten nach der Injektion).

a) Skizzieren Sie das Schaubild von f in einem geeigneten Koordinatensystem.

Berechnen Sie die Zeit, nach der sich nur noch die Hälfte der anfänglichen Medikamentenmenge im Blut des Patienten befindet.

Zeigen Sie, dass die Medikamentenmenge ständig abnimmt.

b) Unter der medizinischen Wirkung $w(T)$ eines Medikamentes bis zum Zeitpunkt T (in Minuten) versteht man den Ausdruck

$$w(T) = \int_0^T f(t)\,dt,$$

wobei die Funktion f die Menge des Medikamentes im Blut in Abhängigkeit von der Zeit T (in Minuten) beschreibt.

Bestimmen Sie die medizinische Wirkung des Medikamentes aus Aufgabe a) für $T = 30$.

Geben Sie einen integralfreien Term für die medizinische Wirkung zum Zeitpunkt T an.

c) Erläutern Sie die folgende Rechnung und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

$$\begin{aligned} \int_0^{35} f(t)\ dt &\approx 185{,}01 \\ w(T) \longrightarrow\ & 189{,}75 \text{ für } T \to \infty \\ \frac{185{,}01}{189{,}75} &\approx 0{,}98 = 98\ \% \end{aligned}$$

d) Das Medikament kann auch über eine Tropfinfusion verabreicht werden. Dabei gelangt jede Minute eine gleichbleibende Menge von $c = 3$ mg des Medikamentes in den Blutkreislauf, wobei über die Nieren in jeder Minute k = 10 % des im Blut vorhandenen Medikamentes abgebaut werden.

Für die im Blut befindliche Menge h des Medikamentes in Abhängigkeit von der Zeit t in Minuten gilt allgemein (mit den obigen Bezeichnungen):

$$h(t) = \frac{c}{k} \cdot (1 - e^{-kt}).$$

Geben Sie die Funktionsgleichung $h(t)$ für die im Blut befindliche Medikamentenmenge bei einer Tropfinfusion an.

Zeigen Sie, dass H mit

$$H(t) = 30 \cdot (t + 10 \cdot e^{-0,1t})$$

eine Stammfunktion von h ist. Berechnen Sie die medizinische Wirkung der Tropfinfusion nach 30 Minuten.

Diskutieren Sie die Einsatzmöglichkeiten der beiden Darreichungsformen „Spritze“ und „Tropfinfusion“ anhand der betrachteten Graphen.

Wahlteil Geometrie

Eine Hütte hat die Grundfläche ABCD und ein pyramidenförmiges Dach EFGHS. Hierbei ist $A(4|0|0)$, $B(4|4|0)$, $C(0|4|0)$ und $E(4|0|2)$ (alle Angaben in Meter). Die Punkte E, F, G, H liegen jeweils 2 m über A, B, C, D, die Spitze S des Dachs ist 4 m über dem Mittelpunkt von ABCD.

$M(7|0|3)$ beschreibt die Spitze eines Fahnenmasts, und zwei Stromleitungen werden beschrieben durch die Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -30 \\ 15 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Sonne scheint aus der Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Skizzieren Sie die Hütte in einem Koordinatensystem und besdtimmen Sie deren Volumen.

Bestimmen Sie den Inhalt der Dachfläche.

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, welche E, F und S enthält.

b) Prüfen Sie, ob der Schatten der Fahnenmastspitze in der Dachfläche EFS liegt.

c) Bestimmen Sie den kürzesten Abstand der beiden Stromleitungen.

Bestimmen Sie weiter den kürzesten Abstand der Dachspitze zur Stromleitung h.

d) Von einem Satelliten, der genau über dieses Gebiet fliegt, scheinen sich die Stromleitungen unter einem gewissen Winkel α zu schneiden. Bestimmen Sie diesen Winkel.

Wahlteil Stochastik

Zur Fußballweltmeisterschaft 2014 bietet ein Schokoladenhersteller zusätzlich zu jeder Tafel Schokolade ein (von außen nicht erkennbares) Sammelbild an. Die Bilder zeigen Spieler aller beteiligten Nationen. Besonders beliebt sind die Sammelbilder mit den deutschen Nationalspielern. Nach Angaben des Herstellers enthält jede fünfte Tafel ein Bild eines Spielers der deutschen Nationalmannschaft. Die Bilder werden völlig zufällig in die Verpackungen gelegt.

a) Peter kauft im Supermarkt 20 Tafeln Schokolade. Es sollen folgende Ereignisse betrachtet werden:

A: Er findet genau vier Bilder deutscher Nationalspieler.

B: Es sind mindestens sechs Bilder deutscher Nationalspieler dabei.

C: Peter findet in der letzten geöffneten Verpackung zum ersten Mal das Bild eines deutschen Nationalspielers.

Begründen Sie, dass man die Zufallsexperimente A und B als Bernoulli-Kette auffassen kann, und geben Sie deren Parameter an.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der oben genannten Ereignisse.

b) Inga möchte unbedingt ein Bild irgendeines deutschen Nationalspielers bekommen. Berechnen Sie die Anzahl der Schokoladentafeln, die sie mindestens kaufen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens ein solches Bild zu erhalten.

c) Die Filialleiterin eines Supermarktes führt eine Werbeaktion durch. Sie verspricht jedem Kunden, der einen Karton mit 20 Schokoladentafeln kauft und dabei nicht mindestens zwei Bilder eines deutschen Nationalspielers bekommt, die Auszahlung von 10 Euro. An einem Karton mit 20 Tafeln Schokolade macht sie außerhalb der Werbeaktion einen Gewinn von 5 Euro.

Berechnen Sie den zu erwartenden Gewinn pro verkauftem Karton während der Werbeaktion.

Lösungen Pflichtteil

(1) $f'(x) = 4xe^{-x} - (1 + 2x^2)e^{-x}$.

(2) $F'(x) = 2e^{-x} - (1 + 2x)e^{-x} = (2 - 1 - 2x)e^{-x} = (1 - 2x)e^{-x}$.

$\int_{-0,5}^{0} f(x)\, dx = F(0) - F(-0{,}5) = 1$.

(3) Nullstellen: $f(x) = 0$ liefert $x_1 = \frac{1}{2}$.

Zum Ableiten schreiben wir

$$f(x) = \frac{4x - 2}{x^2} = \frac{4x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}$$

und erhalten

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^3},$$
$$f''(x) = \frac{8}{x^3} - \frac{12}{x^4}.$$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$ liefert

$$-\frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^3} = 0 \qquad \Big| \cdot x^3$$
$$-4x + 4 = 0,$$

also $x_2 = 1$. Wegen $f(1) = 2$ und $f''(1) = -4 < 0$ liegt in $H(1|2)$ ein Hochpunkt vor.

Senkrechte Asymptote $x = 0$, waagrechte Asymptote $y = 0$.

(4) Schnittpunkt von $y = f(x)$ mit $y = 4$ ist $S(\frac{2}{\sqrt{a}}|4)$.

Die linke Fläche muss gleich 8 sein:

$$8 = \int_0^{2/\sqrt{a}} (4 - ax^2)\, dx = 4x - \tfrac{a}{3}x^3\Big|_0^{2/\sqrt{a}}$$
$$= x\big(4 - \tfrac{a}{3}x^2\big)\Big|_0^{2/\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{a}}(4 - \tfrac{4}{3}) = \frac{16}{3\sqrt{a}}.$$

Dies ergibt $a = \frac{4}{9}$.

(5) Das Schaubild geht durch den Punkt $(2|3)$ und hat dort Steigung $g'(2) = 2$, sowie einen Wendepunkt.

(6) a) Gerade $g_{AB} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$; Punktprobe liefert $t = -\frac{1}{2}$. Weil dieser Wert nicht zwischen 0 und 1 liegrt, liegt der Punkt nicht auf der Strecke $\overline{AB}$.

b) $t = \frac{1}{4}$ einsetzen ergibt $D(3|1|-6)$.

(7) Schnittpunkte von E mit der x_1-Achse bzw. x_2-Achse sind die Spurpunkte $S_1(-9|0|0)$ und $(S_2(0|-18|0)$. Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks OS_1S_2 ist damit $F = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 18 = 81$.

Die Normalenvektoren von E haben die Form $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2k \\ k \\ -2k \end{pmatrix}$ für $k \neq 0$. Einsetzen des Punkts $P(2l|k|-2k)$ in E liefert $k = -2$, also $\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2k \\ 4 \end{pmatrix}$.

(8) a) $(1-p)^7$ ist die Wahrscheinlichkeit, bei 7 Spielen nie blau zu treffen.

b) $p(2 \text{ blaue }) = \binom{10}{2} p^2 (1-p)^8$.

c) Bei jedem Drehen gibt es zwei Möglichkeiten, insgesamt also $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ Möglichkeiten.

Lösungen Analysis

a) $f(0) = 20$; Schnittpunkt $f(t) = 10$ ergibt $t = 6{,}58$. Nach etwa 6,6 Minuten ist nur noch die Hälfte des Medikaments vorhanden.

$f'(t) = -2{,}108e^{-0{,}1054t} < 0$, da die Exponentialfunktion nur negative Werte annimmt. Alslo ist f monoton fallend.

b) $\int_0^{30} f(t)\,dt \approx 181{,}7$ (GTR). Die Wirkung beträgt etwa 181,7 mg·min. (Diese Definition ist der Phantasie der Aufgabensteller entsprungen und hat mit keiner Realität dieses Universums etwas zu tun).

$$w(T) = \frac{20}{0{,}1054} - \frac{20}{0{,}1054} e^{-0{,}1054T} \approx 189{,}75 - 189{,}75e^{-0{,}1054T}.$$

c) Berechnung der Wirkung nach 35 Minuten; Berechnug der langfristigen Wirkung; wieviel Prozent der maximalen Wirkung hat man nach 35 Minuten bereits erzielt.

d) $h(t) = \frac{3}{0{,}1}(1 - e^{-0{,}1t}) = 30(1 - e^{-0{,}1t})$.

$H'(t) = 30(1 - e^{-0{,}1t}) = h(t)$.

Der Person, die solche Aufgaben entwirft, sollte man eine Beschäftigung geben, die ihren Kompetenzen eher entspricht. Testlutscher für Eis am Stiel etwa.

Die Musterlösung jedenfalls sieht so aus:

- Spritze: Das Medikament steht sofort zur Verfügung, wird allerdings sehr schnell im Körper abgebaut. Die gesamte medizinische Wirkung liegt schon kurz nach der Verabreichung vor.
- Tropf: Hier kann man nach verhältnismäßig kurzer Zeit eine nahezu konstante Konzentration des Medikaments im Blut erreichen, die auch über einen längeren Zeitraum anhält.

Das mag stimmen, aber was hat das mit der Frage zu tun? Ich beginne zu verstehen, warum Hessen seine Abiturprüfungen quasi geheim hält.

Hinweise Geometrie

a) Volumen Quader + Volumen Pyramide.

Dachfläche: vier gleichschemklige Dreiecke.

b) Gerade durch Fahnenmastspitze mit Ebene schneiden; Skizze von Punkt und Fläche von oben (ohne x_3-Koordinate).

c) Abstand windschiefer Geraden (Ebene, die eine Gerade enthält und parallel zur andern ist; danach HNF mit Stützpunkt der "anderen").

Abstand mit HNF.

d) Winkel der Richtungsvektoren der Stromleitungen, aber ohne x_3-Koordinate.

Lösungen Stochastik

a) Es geht nur um deutsche oder nicht deutsche Nationalspieler, und die Wahrscheinlichkeit, dass es ein deutscher ist, ändert sich nicht. Also liegt Binomialverteilung vor. Paramter sind $n = 20$ und $p = 0{,}2$.

Sei X die Anzahl der Sammelbilder deutscher Nationalspieler.

- $p(A) = p(X = 4) \approx 0{,}218$.
- $p(B) = p(X \geq 6) = 1 - p(X \leq 5) \approx 0{,}196$.
- $p(C) = 0{,}8^{19} \cdot 0{,}2 \approx 0{,}0029$.

b) $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) > 0{,}9$ liefert

n	p
20	0,988
21	0,991

Sie muss daher mindestens 21 kaufen.

c) Es ist $p(X < 2) = p(X \leq 1) \approx 0{,}0691$.

G	-5	$+5$
p	0,0691	0,9309

$E(G) = -5 \cdot 0{,}0691 + 5 \cdot 0{,}9309 \approx 4{,}31$. Im Schnitt gewinnt sie 4,31 Euro.