K2 MATHEMATIK KLAUSUR 3

15. 02. 2017

Aufgabe	1	2	3	A-a)	A-b)	A-c)
Punkte (max)	2	2	2	5	3	3
Punkte						

Aufgabe	G-a)	G-b)	G-c)	G-d)	S-a)	S-b)
Punkte (max)	2	2	2	2	2	3
Punkte						

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

Hilfsmittelfreier Teil

(1) Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = \sqrt{2x} \cdot \sin(x).$$

(2) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{x+1}.$$

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(0) = 3$.

(3) Lösen Sie die Gleichung

$$e^x(e^x - 3) = 4.$$

(*) Zwei Raketen fliegen genau aufeinander zu. Die erste Rakete hat eine Geschwindigkeit von 6400 km/h, die zweite von 4400 km/h. Wie weit sind die Raketen eine Sekunde vor dem Zusammenstoß noch voneinander entfernt?

Wahlteil Analysis

Auf einem Kreuzfahrtschiff mit 2500 Passagieren erkrankt zum Zeitpunkt $t = 0$ auf hoher See ein Ehepaar an starker Übelkeit. Als nach kurzer Zeit bei mehreren Passagieren ernsthafte Krankheitsbeschwerden auftreten, vermutet die Schiffsärztin das Vorliegen einer ansteckenden Infektionskrankheit.

a) Die Anzahl der erkrankten Passagiere nach t Tagen kann durch die Funktionsgleichung

$$f(t) = 2500 - 2498 \cdot e^{-0{,}008t}$$

(t in Tagen, $f(t)$ in Personen) beschrieben werden.

Wie viele Personen sind nach 5 Tagen krank?

An welchem Tag nach Ausbruch der Krankheit sind 5 % der Passagiere erkrankt?

Zeigen Sie, dass die Funktion für geeignete Werte von k und S der Differentialgleichung

$$f'(t) = k \cdot (S - f(t))$$

des beschränkten Wachstums genügt.

b) Fünf Tage nach Ausbruch der Krankheit erhält die Schiffsärztin per Hubschrauber ein gegen die Infektionserreger hochwirksames Medikament, welches allen erkrankten Passagieren sofort verabreicht wird und langfristig zu deren Heilung führt. Die momentane Änderungsrate der erkrankten Passagiere pro Tag ab dem Zeitpunkt $t = 5$ kann nun durch die Funktionsgleichung

$$h(t) = 10(6 - t)e^{-0{,}05t^2+0{,}6t-1{,}75}$$

beschrieben werden (t in Tagen nach Ausbruch der Krankheit).

Skizzieren Sie den Graph von h für die ersten zwei Wochen nach Verabreichung des Medikaments in einem geeigneten Koordinatensystem.

Wann ist die Anzahl der Kranken maximal? Wie viele Kranke gibt es dann?

c) Zeigen Sie, dass

$$H(t) = 100 \cdot e^{-0{,}05t^2+0{,}6t-1{,}75}$$

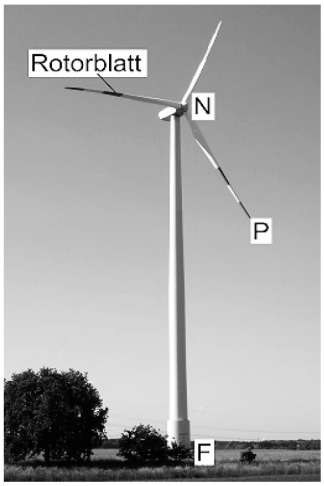
eine Stammfunktion von h ist.

Geben Sie einen integralfreien Term für die Anzahl $A(t)$ der erkrankten Passagiere für $t \geq 5$ an, welcher die Bedingung erfüllt, dass langfristig alle Kranken gesund werden.

Wie groß muss $A(5)$ sein, damit $A(t)$ die vorliegende Situation korrekt beschreibt? Ist diese Bedingung erfüllt?

Wahlteil Geometrie

Bei einer Windkraftanlage ist auf einem hohen Turm die Gondel mit dem Rotor angebracht. Die drei Rotorblätter laufen im Punkt $N(2|2|140)$ zusammen (1 LE entspricht 1 m). Die Spitze eines der Rotorblätter ist zu einem bestimmten Zeitpunkt im Punkt $P(34|-22|110)$.



Der Punkt $F(2|2|0)$ liegt in der x_1x_2-Ebene.

a) Berechnen Sie die Länge eines Rotorblattes.

Berechnen Sie die Gesamthöhe des Windrades vom Punkt F bis zum höchsten Punkt H, den die Spitzen der Rotorblätter bei ihrer Drehung durchlaufen.

b) Die Rotorblätter drehen sich in der Ebene E, welche die Punkte F, N und P enthält.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform. (mögliches Ergebnis: $E: 3x_1 + 4x_2 = 14$).

c) Ein Vogel fliegt entlang der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 127 \\ 230 \\ 150 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Flugbahn mit der Ebene E.

Untersuchen Sie, ob der Vogel durch die sich drehenden Rotorblätter gefährdet ist.

d) Zur optimalen Nutzung der Windenergie sollte der Wind senkrecht auf die Ebene E treffen, in der sich die Rotorblätter drehen.

Der Wind weht in Richtung $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie, um welchen Winkel die Gondel gedreht werden muss, damit der Wind senkrecht auf die Ebene trifft, in der sich die Rotorblätter drehen.

Stochastik. In Urne A befinden sich zwei rote und drei weiße Kugeln. Urne B enthält drei rote und zwei weiße Kugeln. Betrachtet wird folgendes Zufallsexperiment:

Aus Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt; danach wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne A gelegt.

a) Geben Sie alle Möglichkeiten für den Inhalt der Urne A nach der Durchführung des Zufallsexperiments an.

b) Betrachtet wird das Ereignis E: Nach Durchführung des Zufallsexperiments befinden sich wieder drei weiße Kugeln in Urne A.

Untersuchen Sie, ob das Ereignis E eine größere Wahrscheinlichkeit als sein Gegenereignis hat.

Formeln. Winkel zwischen zwei Geraden (Richtungsvektor $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$):

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$$

Winkel zwischen Gerade (Richtungsvektor $\vec{u}$) und Ebene (Normalenvektor $\vec{n}$):

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

Winkel zwischen zwei Ebenen (Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$):

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$