Verkettung von Funktionen

Funktionen lassen sich addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren, und sie lassen sich (unter geeigneten Bedingungen) verketten. Damit ist gemeint, dass man sie hintereinander ausführt. Ist etwa $u(x) = x^2$ und $v(x) = 2x + 1$, dann erhält man, wenn man erst u und dann v anwendet,

$$x \xrightarrow{\ u\ } x^2 \xrightarrow{\ v\ } 2x^2 + 1,$$

denn es ist $u(x) = x^2$ und $v(u(x)) = v(x^2) = 2x^2 + 1$.

Verkettung von Funktionen

Die Verkettung von Funktionen hängt von der Reihenfolge ab: wendet man erst v und dann u an, erhält man

$$x \xrightarrow{\quad v \quad} 2x + 1 \xrightarrow{\quad u \quad} (2x+1)^2,$$

denn es ist $v(x) = 2x + 1$ und $u(v(x)) = u(2x+1) = (2x+1)^2$.

Verkettung von Funktionen

Verkette folgende Funktionen.

$u(x)$	$v(x)$	$u(v(x))$	$v(u(x))$
$2x$	$x+1$		
$1-x^2$	$2x-1$		
$\sin(x)$	x^2		
$1-3x$	x^5		

Verkettung von Funktionen

Verkette folgende Funktionen.

$u(x)$	$v(x)$	$u(v(x))$	$v(u(x))$
$2x$	$x+1$	$2(x+1)$	$2x+1$
$1-x^2$	$2x-1$	$1-(2x-1)^2$	$2(1-x^2)-1$
$\sin(x)$	x^2	$\sin(x^2)$	$(\sin(x))^2$
$1-3x$	x^5	$1-3x^5$	$(1-3x)^5$

Verkettung von Funktionen

Die Verkettung zweier Funktionen ist nicht immer möglich: ist $u(x) = -1 - x^2$ und $v(x) = \sqrt{x}$, dann gibt es zwar $u(v(x)) = -1 - \sqrt{x}^2 = -1 - x$ (für $x \geq 0$, sonst ist g sinnlos), aber $v(u(x)) = \sqrt{-1 - x^2}$ hat für kein einziges x einen sinnvollen Wert.

Kettenregel

Bei der Herleitung der Kettenregel werden wir uns auf den Spezialfall beschränken, dass $u(x) = x^n$ ist.

Ist $u(x) = x^2$ und $v(x)$ eine beliebige Funktion, dann ist

$$f(x) = u(v(x)) = v(x)^2 = v(x) \cdot v(x).$$

Diese Verkettung können wir mit der Produktregel ableiten:

$$f'(x) = v'(x) \cdot v(x) + v(x) \cdot v'(x) = 2v(x) \cdot v'(x).$$

Ist $u(x) = x^3$, dann ist

$$f(x) = u(v(x)) = v(x)^3.$$

Wie könnte man diese Funktion ableiten?

Kettenregel

Ist $u(x) = x^3$, dann ist

$$f(x) = u(v(x)) = v(x)^3.$$

Wie könnte man diese Funktion ableiten?

Wir schreiben

$$f(x) = v(x)^3 = v(x) \cdot v(x)^2$$

und wenden die Formel für die Ableitung von $v(x)^2$ an, die wir eben hergeleitet haben.

Kettenregel

Wir schreiben

$$f(x) = v(x)^3 = v(x) \cdot v(x)^2$$

und finden

$$\begin{aligned} f'(x) &= v'(x) \cdot v(x)^2 + v(x) \cdot 2v(x) \cdot v'(x) \\ &= 3v(x)^2 \cdot v'(x). \end{aligned}$$

Kettenregel

Jetzt berechnen wir die Ableitung von
$f(x) = v(x)^4 = v(x) \cdot v(x)^3$. Wir finden

$$\begin{aligned} f'(x) &= v'(x) \cdot v(x)^3 + v(x) \cdot 3v(x)^2 \cdot v'(x) \\ &= 4v(x)^3 \cdot v'(x). \end{aligned}$$

Kettenregel

Damit haben wir folgende Ergebnisse:

$f(x)$	$f'(x)$
$(v(x))^2$	$2v(x) \cdot v'(x)$
$(v(x))^3$	$3(v(x))^2 \cdot v'(x)$
$(v(x))^4$	$4(v(x))^3 \cdot v'(x)$
$(v(x))^5$	
$\dots$	
$(v(x))^n$	

Kettenregel

Damit haben wir folgende Ergebnisse:

$f(x)$	$f'(x)$
$(v(x))^2$	$2v(x) \cdot v'(x)$
$(v(x))^3$	$3(v(x))^2 \cdot v'(x)$
$(v(x))^4$	$4(v(x))^3 \cdot v'(x)$
$(v(x))^5$	$5(v(x))^4 \cdot v'(x)$
$\ldots$	
$(v(x))^n$	$n(v(x))^{n-1} \cdot v'(x)$

Kettenregel

Gilt diese Regel auch für den Exponenten $n = \frac{1}{2}$?
Dann müsste $f(x) = \sqrt{v(x)} = (v(x))^{\frac{1}{2}}$ die Ableitung
$f'(x) = \frac{1}{2} v(x)^{-\frac{1}{2}} \cdot v'(x) = \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}}$ besitzen.
Wir wollen das zumindest plausibel machen. Dazu leiten wir
$v(x) = (f(x))^2$ ab und finden

$$v'(x) = 2f(x) \cdot f'(x),$$

also

$$f'(x) = \frac{v'(x)}{2f(x)} = \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}}$$

wie erwartet.

Kettenregel

Auf dieselbe Art können wir die Ableitung von
$f(x) = \sqrt[3]{v(x)} = v(x)^{\frac{1}{3}}$ bestimmen.
Es ist nämlich $v(x) = f(x)^3$ und damit

$$v'(x) = 3f(x)^2 \cdot f'(x),$$

also

$$f'(x) = \frac{v'(x)}{3f(x)^2}$$

wie erwartet.

Kettenregel

Die Kettenregel gilt auch für Funktionen der Form

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} = (g(x))^{-1}.$$

Anwenden der Kettenregel liefert

$$f'(x) = -(g(x))^{-2} \cdot g'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2},$$

und dasselbe Ergebnis erhält man ohne Kettenregel so: Die Gleichung $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ ist gleichbedeutend mit $f(x) \cdot g(x) = 1$. Ableiten mit der Produktregel ergibt

$$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 0,$$

und Auflösen nach $f'(x)$ liefert wie erwartet

$$f'(x) = -\frac{f(x)}{g(x)} \cdot g'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Kettenregel

Mit dieser Regel lassen sich schon einige Funktionen ableiten:

$$f(x) = (2x-1)^4 \qquad f'(x) =$$

$$f(x) = 3(\sin(x))^4 \qquad f'(x) =$$

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \qquad f'(x) =$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad f'(x) =$$

$$f(x) = 2(1-x^3)^3 \qquad f'(x) =$$

Kettenregel

Mit dieser Regel lassen sich schon einige Funktionen ableiten:

$$f(x) = (2x-1)^4 \qquad f'(x) = 8(2x-1)^3$$

$$f(x) = 3(\sin(x))^4 \qquad f'(x) = 12(\sin(x))^3$$

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \qquad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$$f(x) = 2(1-x^3)^3 \qquad f'(x) = -18x^2(1-x^3)^2$$

Kettenregel

Die Ableitung von

$$f(x) = (v(x))^n$$

ist

$$f'(x) = nv(x)^{n-1} \cdot v'(x).$$

Diese Ableitung besteht aus zwei Teilen:

- Den Faktor $nv(x)^{n-1}$ nennt man die **äußere Ableitung**; dies ist die Ableitung der äußeren Funktion $u(x) = x^n$ für $x = v(x)$.
- Den Faktor $v'(x)$ nennt man die **innere Ableitung**; dies ist die Ableitung der inneren Funktion $v(x)$.

Kettenregel

Ganz genauso geht man bei anderen verketteten Funktionen vor:

$f(x)$	äußere F.	innere F.	$u'(v(x))$	$f'(x)$
$\sin(\pi x)$	$\sin(x)$	πx	$\cos(\pi x)$	$\pi\cos(\pi x)$
$\cos(\pi x+\pi)$	$\sin(x)$	$\pi x+\pi$	$-\sin(\pi x+\pi)$	$-\pi\sin(\pi x+\pi)$
$2\sin(x^2)$	$2\sin(x)$	x^2	$2\cos(x^2)$	$4x\cos(x^2)$

Ableitungen

Selbstverständlich kann man Produkt- und Kettenregel auch kombinieren:

$$f(x) = 2x\cos(\pi x) \qquad f'(x) =$$

$$f(x) = 3x^2 \cdot (2x-1)^5 \qquad f'(x) =$$

$$f(x) = 2\sqrt{x} \cdot \sin(4x) \qquad f'(x) =$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad f'(x) =$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad f'(x) =$$

$$f(x) = x - (x^2 + 2x)^2 \qquad f'(x) =$$

Ableitungen

$$f(x) = 2x\cos(\pi x) \qquad f'(x) = 2\cos(\pi x) - 2\pi x \sin(\pi x)$$

$$f(x) = 3x^2 \cdot (2x-1)^5 \qquad f'(x) = 6x(2x-1)^5 + 30x^2(2x-1)^4$$

$$f(x) = 2\sqrt{x} \cdot \sin(4x) \qquad f'(x) = \frac{\sin(4x)}{\sqrt{x}} + 8\sqrt{x} \cdot \cos(4x)$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad f'(x) = -\frac{\sin(x)}{x^2} + \frac{\cos(x)}{x}$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad f'(x) = 1 + \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2}$$

$$f(x) = x - (x^2+2x)^2 \qquad f'(x) = 1 - 2(2x+2)(x^2+2x)$$