Programm K1

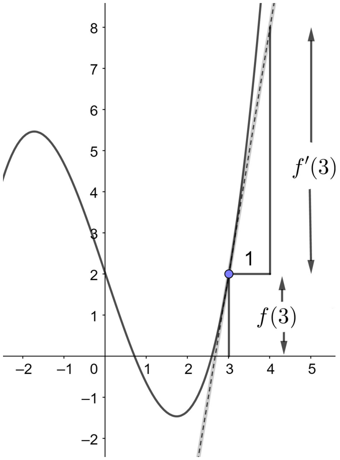
- 1. Halbjahr: Fortführung der Differential- und Integralrechnung. Produkt- und Kettenregel, Exponentialfunktion und Logarithmus, Flächenberechnungen mit Integralen
- 2. Halbjahr: Vektorrechnung. Ebenengleichungen, Skalar- und Vektorprodukt, Abstände und Winkel. Wahrscheinlichkeit: Binomialverteilung

Wiederholung

Anschauliche Bedeutung von $f(x)$ und $f'(x)$:

- $y = f(3)$ ist der *Funktionswert* an der Stelle $x = 3$, also die y-Koordinate des Punktes $P(3|f(3))$ auf dem Schaubild von f.
- $m = f'(3)$ ist die *Steigung* der Tangente an das Schaubild von f im Punkt $P(3|f(3))$ (oder an der Stelle $x = 3$).

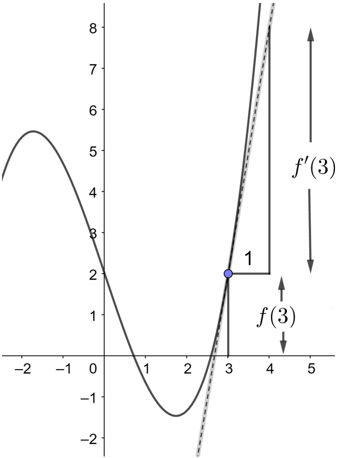
Wiederholung



Lies ab:

$$f(3) =$$
$$f'(3) =$$

Wiederholung



Lies ab:

$$f(3) = 2$$
$$f'(3) = 6$$

Wiederholung

Aufgabe: Skizziere das Schaubild der Funktion

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

samt Tangente in $x = 0$.

Wiederholung

Aufgabe: Skizziere das Schaubild der Funktion

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

samt Tangente in $x = 0$.

Lösung: Das Schaubild von f ist eine nach oben offene Normalparabel.

Skizze mit Hilfe einer Wertetabelle:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$					

Wiederholung

Aufgabe: Skizziere das Schaubild der Funktion

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

samt Tangente in $x = 0$.

Lösung: Das Schaubild von f ist eine nach oben offene Normalparabel.

Skizze mit Hilfe einer Wertetabelle:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	5	1	-1	-1	1

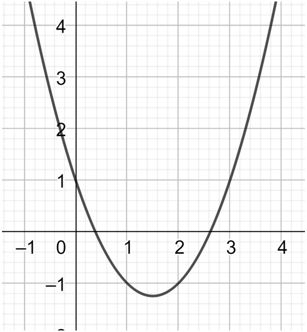
Wiederholung

Aufgabe: Skizziere das Schaubild der Funktion

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

samt Tangente in $x = 0$.

Parabel:



Wiederholung

Berechnung der Tangente in $(0|1)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 3x + 1 \\ f(0) &= \\ f'(x) &= \\ f'(0) &= \end{aligned}$$

Wiederholung

Berechnung der Tangente in (0|1):

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 3x + 1 \\ f(0) &= 1 \\ f'(x) &= 2x - 3 \\ f'(0) &= -3 \end{aligned}$$

Wiederholung

Berechnung der Tangente in $(0|1)$:

Einsetzen von $y = 1$ und $m = -3$ in Geradengleichung $y = mx + b$.

Wiederholung

Berechnung der Tangente in $(0|1)$:

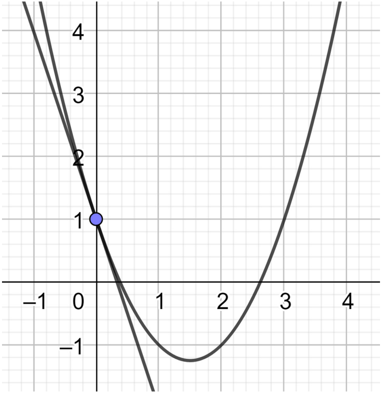
Einsetzen von $y = 1$ und $m = -3$ in Geradengleichung $y = mx + b$.

$1 = -3 \cdot 0 + b$ liefert $b = 1$ (klar, weil $f(0)$ den y-Achsenabschnitt angibt). Tangente: $y = -3x + 1$.

Wiederholung

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$t: y = \quad - 3x + 1$$



Wiederholung

Ist es Zufall, dass die Tangente an $f(x) = x^2 - 3x + 1$ die Gleichung $y = -3x + 1$ hat?
Bestimme die Tangente an die Polynomfunktion

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

in $x = 0$.

Wiederholung

Bestimme die Tangente an die Polynomfunktion

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

in $x = 0$.
Antwort:

$$\begin{aligned} f(0) &= -1 \\ f'(x) &= 8x^2 - 3x^2 + 4x + 2 \\ f'(0) &= 2 \end{aligned}$$

und damit $t: \quad y = 2x - 1.$

Wiederholung

Aufgabe: Zeige, dass die Tangente an das Schaubild von

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

an der Stelle $x = 0$ gleich

$$y = a_1 x + a_0$$

ist.

Wiederholung

Aufgabe: Zeige, dass die Tangente an das Schaubild von

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

an der Stelle $x = 0$ gleich

$$y = a_1 x + a_0$$

ist.

$$\begin{aligned} f(0) &= \\ f'(x) &= \\ f'(0) &= \end{aligned}$$

Wiederholung

Aufgabe: Zeige, dass die Tangente an das Schaubild von

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

an der Stelle $x = 0$ gleich

$$y = a_1 x + a_0$$

ist.

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 \\ f'(x) &= n a_n x^{n-1} + \ldots + 2 a_2 x + a_1 \\ f'(0) &= a_1 \end{aligned}$$

Wiederholung

Aufgabe: Zeige, dass die Tangente an das Schaubild von

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

an der Stelle $x = 0$ gleich

$$y = a_1 x + a_0$$

ist.

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 \\ f'(x) &= n a_n x^{n-1} + \ldots + 2a_2 x + a_1 \\ f'(0) &= a_1 \end{aligned}$$

Einsetzen von $y = a_0$ und $m = a_1$ in $y = mx + b$ liefert

Wiederholung

Aufgabe: Zeige, dass die Tangente an das Schaubild von

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

an der Stelle $x = 0$ gleich

$$y = a_1 x + a_0$$

ist.

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 \\ f'(x) &= n a_n x^{n-1} + \ldots + 2 a_2 x + a_1 \\ f'(0) &= a_1 \end{aligned}$$

Einsetzen von $y = a_0$ und $m = a_1$ in $y = mx + b$ liefert die Tangentengleichung

$$y = a_1 x + a_0.$$

Wiederholung

Aufgabe: Lies die Tangentengleichungen in $x = 0$ ab.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 - 5x + 7 & t: y &= \\
f(x) &= x^3 - 3x & t: y &= \\
f(x) &= x^4 - 2x^2 + 2 & t: y &= \\
f(x) &= x^6 - x^5 & t: y &= \\
f(x) &= 3x^3 - 2x^2 + 7x - 1 & t: y &=
\end{aligned}$$

Wiederholung

Aufgabe: Lies die Tangentengleichungen in $x = 0$ ab.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 - 5x + 7 & t: y &= -5x + 7 \\
f(x) &= x^3 - 3x & t: y &= -3x \\
f(x) &= x^4 - 2x^2 + 2 & t: y &= 2 \\
f(x) &= x^6 - x^5 & t: y &= 0 \\
f(x) &= 3x^3 - 2x^2 + 7x - 1 & t: y &= 7x - 1
\end{aligned}
$$

Wiederholung

Merke: ist

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

dann ist

$$y = a_1 x + a_0$$

die Tangentengleichung an der Stelle $x = 0$.

Insbesondere ist $f'(0) = a_1$.

Wiederholung

Sei $u(x) = x^2 - x + 1$ und $v(x) = x^2 + 2x + 2$. Dann ist
$u'(0) =$ und $v'(0) =$.

Um $f'(0)$ ablesen zu können, müssen wir u und v addieren:

$$f(x) = u(x) + v(x) =$$
$$f'(0) =$$

Wiederholung

Sei $u(x) = x^2 - x + 1$ und $v(x) = x^2 + 2x + 2$. Dann ist $u'(0) = -1$ und $v'(0) = 2$.

Um $f'(0)$ ablesen zu können, müssen wir u und v addieren:

$$f(x) = u(x) + v(x) = 2x^2 + x + 3$$
$$f'(0) = 1 = u'(0) + v'(0)$$

Wiederholung

Dies geht allgemein: Ist $f(x) = u(x) + v(x)$ mit

$$u(x) = \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$
$$v(x) = \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0,$$

dann ist

$$u'(0) =$$
$$v'(0) =$$
$$f(x) = u(x) + v(x) =$$
$$f'(0) =$$

Wiederholung

Dies geht allgemein: Ist $f(x) = u(x) + v(x)$ mit

$$\begin{aligned} u(x) &= \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \\ v(x) &= \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0, \end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned} u'(0) &= a_0 \\ v'(0) &= b_0 \\ f(x) &= u(x) + v(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0 \\ f'(0) &= a_1 + b_1 = u'(0) + v'(0) \end{aligned}$$

Summenregel: Die Ableitung von $f(x) = u(x) + v(x)$ in $x = 0$

ist die Summe der Ableitungen: $f'(0) = u'(0) + v'(0)$

Wiederholung

Summenregel: Die Ableitung von $f(x) = u(x) + v(x)$ in $x = 0$

ist die Summe der Ableitungen: $f'(0) = u'(0) + v'(0)$

Dies gilt an jeder Stelle x (Verschieben!):

Summenregel: Die Ableitung von $f(x) = u(x) + v(x)$

ist die Summe der Ableitungen: $f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Wiederholung

Ist $f(x) = c \cdot u(x)$ für eine *Konstante* c, also

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \\
f(x) &= c \cdot u(x) =
\end{aligned}
$$

dann ist

$$
\begin{aligned}
u'(0) &= \\
f'(0) &=
\end{aligned}
$$

und wir haben die

$\boxed{\text{Faktorregel: Die Ableitung von } f(x) = c \cdot u(x) \text{ in } x = 0}$

$\boxed{\text{ist } f'(0) =}$

Wiederholung

Ist $f(x) = c \cdot u(x)$ für eine *Konstante* c, also

$$u(x) = \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$
$$f(x) = c \cdot u(x) = \ldots + a_2 c x^2 + a_1 c x + a_0 c,$$

dann ist

$$u'(0) = a_1$$
$$f'(0) = a_1 c$$

und wir haben die

Faktorregel: Die Ableitung von $f(x) = c \cdot u(x)$ in $x = 0$ ist $f'(0) = c \cdot u'(0)$

Wiederholung

Auch dies gilt an jeder beliebigen Stelle:

$\boxed{\text{Faktorregel: Die Ableitung von } f(x) = c \cdot u(x)}$

$\boxed{\text{ist } f'(x) = c \cdot u'(x)}$

Produktregel

Für Produkte von Funktionen

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

ist die Gleichung

$$f'(x) = u'(x) \cdot v'(x)$$

fast immer falsch.

Im Falle von

$$f(x) = x^2 = x \cdot x$$

ist sicherlich nicht

$$f'(x) = 1 \cdot 1.$$

Zum Ableiten von Produkten von Funktionen braucht man die *Produktregel*!

Produktregel

Nehmen wir dazu zwei quadratische Funktionen $u(x) = x^2 + ax + b$ und $v(x) = x^2 + cx + d$. Der x^2-Term und höhere Terme werden bei der Herleitung keinerlei Rolle spielen: insbesondere gilt alles für Polynome von beliebigem Grad.
Wir wissen, dass

$$\begin{aligned} u(0) &= b, & u'(0) &= a, \\ v(0) &= c, & v'(0) &= d \end{aligned}$$

gilt.
Jetzt berechnen wir $f(x) = u(x) \cdot v(x)$.

Produktregel

Wir finden

$$\begin{aligned} u(x) \cdot v(x) &= (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \\ &= x^2 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd \end{aligned}$$

Also ist

$$f'(0) = ad + bc = u'(0)v(0) + u(0)v'(0).$$

Produktregel

Weil sich Steigungen beim Verschieben nicht ändern, gilt die Produktregel nicht nur für $x = 0$, sondern an einer beliebigen Stelle: Die Ableitung einer Produktfunktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ ist durch die Produktregel gegeben:

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Kurze Merkregel: $(uv)' = u'v + uv'$.