

INTEGRALRECHNUNG

FRANZ LEMMERMEYER

Die Integralrechnung befasst sich mit der Bestimmung von Flächeninhalten. Ist insbesondere f eine Funktion, die auf einem Intervall $[a, b]$ definiert ist und dort positive Werte annimmt, so bezeichnet man die Fläche zwischen Schaubild und x -Achse in diesem Bereich mit

$$\int_a^b f(x) dx.$$

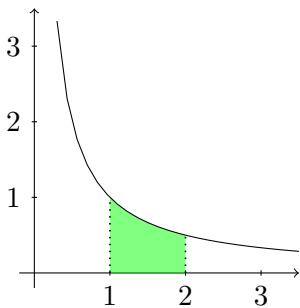
Hier sind $x_1 = a$ und $x_2 = b$ die linken und rechten Grenzen der Fläche, das „ dx “ ist vorläufig nur ein Symbol, das anzeigt, dass die Variable x heißt. Insbesondere ist es egal, ob man

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{oder} \quad \int_a^b f(t) dt$$

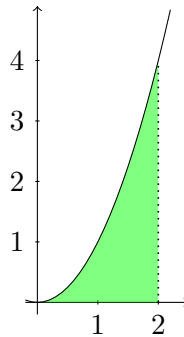
schreibt.

Das Integralzeichen ist ein langgezogenes S; dies soll daran erinnern, dass man Flächen unter dem Schaubild einer Funktion näherungsweise bestimmen kann, indem man die Fläche durch kleine Rechtecke approximiert und deren Flächeninhalt summiert.

Beispiele für Integrale sind:



$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

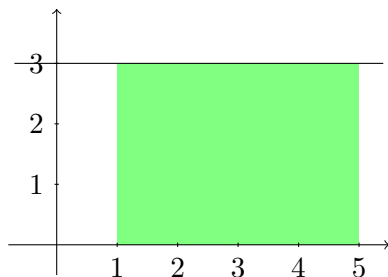


$$\int_0^2 x^2 dx$$

Bisher können wir Integrale nur für ganz einfache Funktionen berechnen, nämlich für Geraden.

Konstante Funktionen. Die Fläche unter dem Schaubild einer konstanten Funktion $f(x) = c$ ist ein Rechteck; im Falle von $f(x) = 3$ ist also beispielsweise

$$\int_1^5 3 \, dx = 4 \cdot 3 = 12.$$



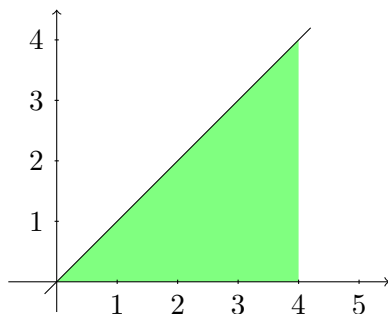
Allgemein ist natürlich

$$\int_a^b c \, dx = (b - a)c$$

die Fläche eines Rechtecks mit Grundseite $b - a$ und Höhe c .

Geraden. Das Integral $\int_0^4 x \, dx$ ist der Inhalt der Fläche unter dem Schaubild von $f(x) = x$ zwischen $x = 0$ und $x = 4$; hier handelt es sich um ein rechtwinkliges Dreieck mit Grundseite 4 und Höhe $f(4) = 4$. Also ist

$$\int_0^4 x \, dx = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8.$$



Im Falle von $f(x) = mx$ erhält man entsprechend

$$\int_0^b mx \, dx = \frac{1}{2} \cdot b \cdot mb = \frac{1}{2}mb^2.$$

Weil offenbar

$$\int_a^b mx \, dx = \int_0^b mx \, dx - \int_0^a mx \, dx$$

gilt, folgt

$$\int_a^b mx \, dx = \frac{1}{2}m(b^2 - a^2).$$

Das Auftreten der Funktion $F(x) = \frac{1}{2}mx^2$ mit $F'(x) = f(x) = mx$ ist kein Zufall: Ist F eine Stammfunktion von f , also eine Funktion mit $F'(x) = f(x)$, dann ist das Integral

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Man braucht also nur eine Stammfunktion finden und die Differenz der Funktionswerte $F(b) - F(a)$ bilden. Wir schreiben dann

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

In den oben betrachteten Beispielen ist

$$\begin{aligned} \int_1^5 3 \, dx &= 3x \Big|_1^5 = 3 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 12, \\ \int_0^4 x \, dx &= \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^4 = \frac{1}{2}4^2 - 0 = 8, \\ \int_0^2 x^2 \, dx &= \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^2 = \frac{8}{3}, \\ \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx &= \ln(x) \Big|_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2). \end{aligned}$$

Die einzige Schwierigkeit beim Berechnen von Integralen ist also das Auffinden einer Stammfunktion.

HAUPTSATZ DER INTEGRALRECHNUNG

Wir wollen jetzt den Zusammenhang zwischen Flächenberechnungen und Stammfunktionen erklären. Dass die Bestimmung von Flächen etwas mit der Ableitung, also der Berechnung von Tangenten, zu tun haben muss, haben zuerst Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz klar gesehen.

Die Steigung einer Tangente im Punkt $P(u|f(u))$ des Schaubilds einer Funktion f haben wir im letzten Schuljahr wie folgt bestimmt: wir

wählen ein kleines h und bestimmen die Steigung der Geraden durch P und $Q(u+h|f(u+h))$, also

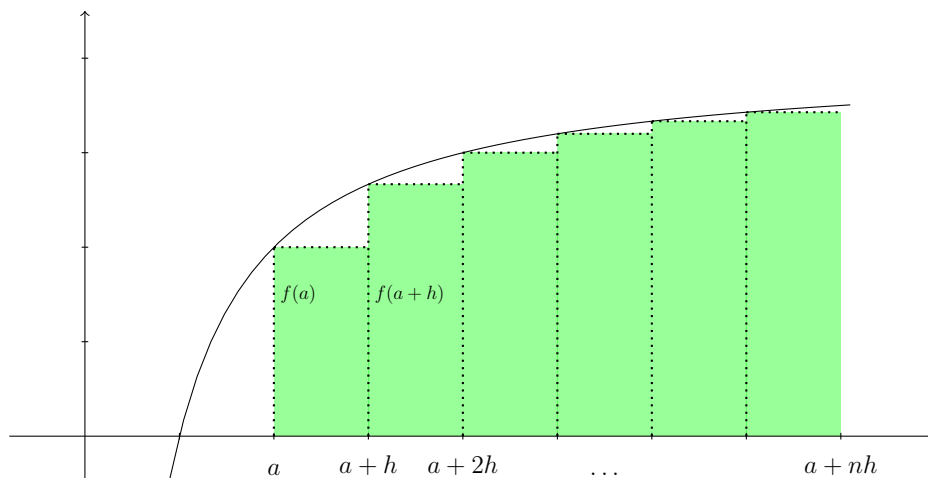
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(u+h) - f(u)}{u+h-u} = \frac{f(u+h) - f(u)}{h}.$$

Lässt man h klein werden, nähert sich m für alle anständigen Funktionen dem Wert der Tangentensteigung $f'(u)$ an. Im Falle $f(x) = x^2$ ist etwa

$$m = \frac{(u+h)^2 - u^2}{h} = \frac{u^2 + 2hu + h^2 - u^2}{h} = \frac{2hu + h^2}{h} = 2u + h.$$

Je kleiner h wird, desto näher ist kommt m der Steigung $f'(u) = 2u$ der Tangente.

Sei $f(x)$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass es eine Funktion F gibt mit $f(x) = F'(x)$. Wir unterteilen das Intervall $[a, b]$ in n gleich lange Abschnitte der Länge $h = \frac{b-a}{n}$. In jedem dieser Abschnitte betrachten wir ein Rechteck, das ganz unter dem Schaubild von f liegt:



Die Summe der Flächen der einzelnen Rechtecke ist dann

$$\begin{aligned} S &= h \cdot f(a) + h \cdot f(a+h) + h \cdot f(a+2h) + \dots + h \cdot f(a+h(n-1)) \\ &= h[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a+h(n-1))]. \end{aligned}$$

Wegen $f(x) = F'(x) \approx \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ für kleine Werte von h ist

$$h \cdot f(x) \approx F(x+h) - F(x).$$

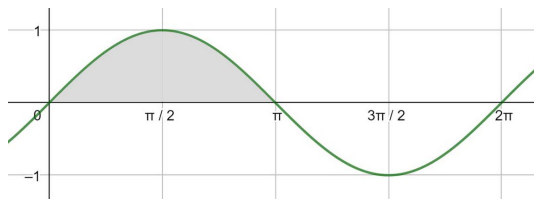
Damit schreibt sich unsere Summe S so:

$$\begin{aligned} S &= h \cdot f(a) + h \cdot f(a+h) + h \cdot f(a+2h) + \dots + h \cdot f(a+h(n-1)) \\ &\approx F(a+h) - F(a) + F(a+2h) - F(a+h) \\ &\quad + F(a+3h) - F(a+2h) + \dots + F(a+hn) - F(a+h(n-1)) \\ &= F(a+hn) - F(a) = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Weil F eine Stammfunktion von f ist, zeigt dies, warum der Hauptsatz richtig sein sollte.

ÜBUNGEN

- (1) Berechne die Fläche unter dem ersten Bogen der Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$.



Lösung. Hier geht es um

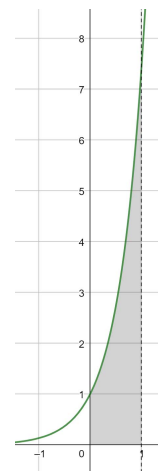
$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2.$$

- (2) Berechne das Integral

$$\int_0^1 e^{2x} dx.$$

Lösung. Es ist

$$\int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^0 = \frac{e^2 - 1}{2}.$$



- (3) Berechne die folgenden Integrale, und skizziere die Schaubilder samt der entsprechenden Flächen.

a) $\int_0^3 x^2 dx =$

b) $\int_0^2 \sqrt{2x} dx =$

c) $\int_1^2 (2x - 1)^4 dx =$

d) $\int_1^e \frac{1}{x} dx =$