MATHEMATIK K1

06.07.2023

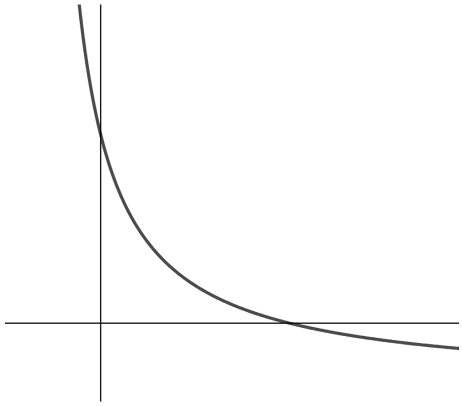
Aufgabe	1	2	3	4a)	b)	c)	d)
Punkte (max)	2	7	4	6	3	3	5
Punkte							

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktion f:

$$f(x) = 3x - 2x\sqrt{x^2+1}.$$

(2) Das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{4}{x+1} - 1$ schließt mit den Koordinatenachsen im ersten Quadranten eine Fläche ein. Berechnen Sie dessen Inhalt.



Bestimmen Sie weiter den Definitionsbereich von f, die Umkehrfunktion $\overline{f}$ und den Wertebereich von f.

(3) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = 2e^{-x} + 3.$$

Geben Sie den Definitionsbereich von f an, bestimmen Sie die Umkehrfunktion $\overline{f}(x)$ von f, und bestimmen Sie den Wertebereich von f.

(4) Gegeben ist eine Pyramide $ABCD$ mit $A(0|-3|0)$, $B(3|0|0)$, $C(0|0|3)$ und $D(3|a|3)$ mit $a < 0$.

(a) Alle Seitenkanten haben die gleiche Länge. Bestimmen Sie die Koordinate a.

Zeichnen Sie die Pyramide in ein geeignetes Koordinatensystem.

(Kontrollergebnis: $a = -3$).

(b) Die Punkte A, B und C liegen in einer Ebene T. Zeigen Sie, dass $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene T ist, und geben Sie eine Koordinatengleichung von T an.

Berechnen Sie den Winkel, den die Ebene T mit der x_1x_2-Ebene einschließt.

(c) Bestimmen Sie den Lotfußpunkt von D auf der Ebene T.

Der Punkt D wird an der Ebene gespiegelt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes D'.

(d) Die Pyramide wird von einer Ebene mit der Gleichung $S_h : x_3 = h$ mit $0 < h < 3$ geschnitten.

Berechnen Sie den Schnittpunkt E_h von S_h mit der Kante AD.

Die Schnittpunkte mit den anderen Kanten sind $F_h(3| - h|h)$, $G_h(3 - h|0|h)$ und $H_h(0|h - 3|h)$.

Zeigen Sie, dass das Viereck $\mathrm{E}_h F_h G_h H_h$ ein Rechteck ist, und bestimmen Sie dessen Flächeninhalt in Abhängigkeit von h.

Winkel zwischen

- zwei Geraden: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$
- zwei Ebenen: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$
- Gerade und Ebene: $\sin\alpha = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$

Lösungen

(1) Es ist

$$f'(x) = 3 - 2\sqrt{x^2+1} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(2) Nullstelle: $f(x) = 0$ liefert $x_1 = 3$.

Fläche:

$$\int_0^3 \Big(\frac{4}{x+1} - 1\Big)\,dx = 4\ln(x+1) - x\Big|_0^3 = 4\ln(4) - 3.$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; Umkehrfunktion:

$$\begin{aligned} y &= \frac{4}{x+1} - 1 \\ y+1 &= \frac{4}{x+1} \\ (x+1)(y+1) &= 4 \\ x+1 &= \frac{4}{y+1} \\ x &= \frac{4}{y+1} - 1 \end{aligned}$$

Also ist $\overline{f}(x) = \frac{4}{x+1} - 1 = f(x)$; dass f und $\overline{f}$ identisch sind liegt daran, dass das Schaubild von f achsensymmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden $y = x$ ist.

Damit ist auch $W_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(3) $D_f = \mathbb{R}$; Umkehrfunktion:

$$\begin{aligned} y &= 2e^{-x} + 3 \\ y - 3 &= 2e^{-x} \\ \frac{y-3}{2} &= e^{-x} \\ \ln(\tfrac{y-3}{2}) &= -x \\ x &= -\ln(\tfrac{y-3}{2}). \end{aligned}$$

Also ist $\overline{f}(x) = -\ln(\frac{x-3}{2})$.

Wertebereich $W_f =]3, \infty[$.

(4) Gegeben ist eine Pyramide $ABCD$ mit $A(0|-3|0)$, $B(3|0|0)$, $C(0|0|3)$ und $D(3|a|3)$ mit $a < 0$.

(a) Alle Seitenkanten haben die gleiche Länge. Bestimmen Sie die Koordinate a.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{18}$; $\overrightarrow{AD} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ a+3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$. Also ist $18 = 9 + (a+3)^2 + 9$, also $a = -3$.

(b) Es ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene T

Damit ist $T: \ x_1 - x_2 + x_3 = 3$.

Winkel:

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

also $\alpha \approx 54{,}7°$.

(c) Lotgerade $\ell: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; Schneiden mit E ergibt $9 + 3t = 3$, also $t = -2$ und damit $L(1|-1|1)$ und $D'(-1|1|-1)$.

(d) Gerade durch A und D ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; Schneiden mit $x_3 = h$ liefert $t = h$ und $E_h(h|-3|h)$.

Parallelogramm: $\overrightarrow{E_hF_h} = \begin{pmatrix} 3-h \\ 3-h \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{H_hG_h} = \begin{pmatrix} 3-h \\ 3-h \\ 0 \end{pmatrix}$.

Rechteck: $\overrightarrow{E_hF_h} \cdot \overrightarrow{E_hH_h} = \begin{pmatrix} 3-h \\ 3-h \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

Flächeninhalt: $|\overrightarrow{E_hF_h}| = (3-h)\sqrt{2}$ wegen $0 < h < 3$, $|\overrightarrow{E_hH_h}| = h\sqrt{2}$; also ist

$$F = (3-h)\sqrt{2} \cdot h\sqrt{2} = 2h(3-h).$$