MATHEMATIK K1

22.06.2023

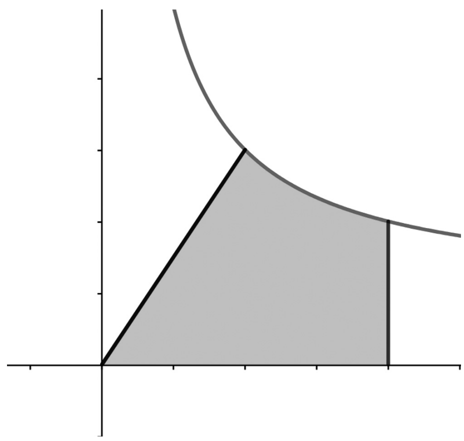
Aufgabe	1	2	3	4	5a)	b)	c)	d)
Punkte (max)	2	3	4	2	7	5	4	3
Punkte								

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktion f:

$$f(x) = 2x - xe^{\sin(x)}$$

(2) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{4}{x}+1$. Berechne die Fläche, welche vom Schaubild, der x-Achse und den Geraden $y = \frac{3}{2}x$ und $x = 4$ begrenzt wird.



(3) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}.$$

Geben Sie den Definitionsbereich an, bestimmen Sie die Umkehrfunktion $\overline{f}(x)$ von f, und bestimmen Sie den Wertebereich von f.

(4) Geben Sie den Definitions- und den Wertebereich der Funktion $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$ an.

(5) Eine Pyramide mit viereckiger Grundfläche ABCD hat die Eckpunkte $A(-3|0|0)$, $B(3|0|0)$, $C(1{,}5|2|0)$, $D(-1{,}5|2|0)$ und $S(0|2|2)$.

(a) Zeichnen Sie die Pyramide in einem geeigneten Koordinatensystem.

Zeigen Sie, dass das Dreieck CDS gleichschenklig ist und geben Sie eine Gleichung der Ebene an, welche dieses Dreieck enthält.

Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist und bestimmen sie dessen Flächeninhalt und das Volumen der Pyramide.

(b) Zeigen Sie: Die Gerade $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 21 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft durch A und schneidet die Pyramidenkante $\overline{CS}$ in Q.

Bestimmen Sie das Verhältnis $\overline{SQ} : \overline{QC}$, in welchem Q die Kante $\overline{CS}$ teilt.

Berechnen Sie den Winkel, den die Gerade g mit der Grundfläche $ABCD$ einschließt.

(c) Betrachtet werden alle Pyramiden mit Grundfläche $ABCD$, bei denen die Pyramidenspitze durch $S_k(0|k|3-k)$ beschrieben werden kann.

Untersuchen Sie, ob es Pyramiden gibt, bei denen das Dreieck ABS_k in S_k rechtwinklig ist.

Bestimmen Sie k so, dass die Pyramide $ABCDS_k$ das Volumen 16 besitzt.

(d) Gegeben ist die Ebenenschar $E_a : ax_2 + 4x_3 = 2a$. Zeigen Sie, dass die Gerade durch C und D in allen Ebenen E_a liegt, und bestimmen Sie a so, dass der Ursprung von E_a Abstand 1,6 hat.

Winkel zwischen

- zwei Geraden: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$
- zwei Ebenen: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$
- Gerade und Ebene: $\sin\alpha = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$

Lösungen

(1) Es ist
$$f'(x) = 2 - e^{\sin(x)} - x\cos(x)e^{\sin(x)}.$$

(2) Schneiden von $y = \frac{3}{2}x$ und $f(x) = \frac{4}{x} + 1$ ergibt $3x^2 - 2x - 8 = 0$, also $x_1 = 2$ und $x_2 = -\frac{4}{3}$. Im ersten Quadranten liegt der Schnittpunkt $S(2|3)$.

Der Flächeninhalt ist gleich $A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 + \int_2^4 (\frac{4}{x} + 1)\,dx = 3 + \Big[4\ln(x) + x\Big]_2^4 = 3 + (4\ln 16 + 4) - (4\ln 8 + 2)) = 5 + 4\ln(16) - 4\ln(8)$.

Wegen $\ln\frac{x}{y} = \ln(x) - \ln(y)$ ist übrigens $\ln(16) - \ln(8) = \ln(2)$, also $A = 5 + 4\ln(2)$

(3) Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Umkehrfunktion:
$$\begin{aligned} y &= \frac{2x-1}{x-1} \\ (x-1)y &= 2x-1 \\ xy - y &= 2x - 1 \\ xy - 2x &= y - 1 \\ x(y-2) &= y - 1 \\ x &= \frac{y-1}{y-2} \end{aligned}$$

Also ist $\overline{f}(x) = \frac{x-1}{x-2}$ und $W_f = D_{\overline{f}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(4) $D_f =]1,\infty[$ und $W_f =]0,\infty[$.

(5) Eine Pyramide mit viereckiger Grundfläche ABCD hat die Eckpunkte $A(-3|0|0)$, $B(3|0|0)$, $C(1{,}5|2|0)$, $D(-1{,}5|2|0)$ und $S(0|2|2)$.

(a) $\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ haben die gleiche Länge. Die Ebene hat offenbar die Gleichung $x_2 = 2$.

ABCD Trapez: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind parallel.

Das Trapez besteht aus einem Rechteck und zwei rechtwinkligen Dreiecken; der Flächeninhalt ist $A = 6 + 3 = 9$. Das Volumen der Pyramide ist daher $V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 2 = 6$.

(b) Stützvektor von g zeigt auf A; Gerade $h_{CS} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; schneiden liefert
$$-3 + 21u = 1{,}5 - 1{,}5t, \quad 10u = 2, \quad 2u = 2t,$$
also $u = \frac{1}{5}$, $t = \frac{1}{5}$ und den Schnittpunkt $Q(1{,}2|2|0{,}4)$. Dieser liegt zwischen C und S, also auf der Kante $\overline{CS}$.

Das Teilungsverhältnis ist $\frac{1}{5} : \frac{4}{5} = 1 : 4$.

Für den Winkel erhält man $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{545}}$, also ist $\alpha \approx 4{,}9°$.

(c) $\overrightarrow{AS_k} = \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ 3-k \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BS_k} = \begin{pmatrix} -3 \\ k \\ 3-k \end{pmatrix}$, also

$$0 = \overrightarrow{AS_k} \cdot \overrightarrow{BS_k} = -9 + k^2 + (3-k)^2.$$

Dies führt auf $2k^2 - 6k = 0$, also $k_1 = 0$ und $k_2 = 3$. Die Punkte sind $S_0(0|0|3)$ und $S_3(0|3|0)$. Nur die erste Lösung liefert eine Pyramide.

Aus $G = 9$ und $16 = V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot h$ folgt $h = \frac{27}{8}$ und damit $k_1 = \frac{7}{3}$ und $k_2 = \frac{25}{3}$.

(d) Einsetzen von C und D in E_a ergibt $2a = 2a$; also liegen beide Punkte und damit die Gerade in jedem E_a.

HNF: $\frac{ax_2+4x_3-2a}{\sqrt{a^2+16}} = 0$; $\frac{8}{5} = \frac{|2a|}{\sqrt{a^2+16}}$ liefert $4\sqrt{a^2+16} = 5|a|$, also $9(a^2+16) = 25a^2$ und damit $16a^2 = 16 \cdot 9$, d.h. $3a = \pm 16$ und endlich $a = \pm\frac{16}{3}$.