MATHEMATIK K1

18.04.2023

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
Punkte (max)	2	2	4	6	7	5	4
Punkte							

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) (2 VP) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktion f:

$$f(x) = 2x - xe^{-2x}.$$

(2) (2 VP) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von

$$f(x) = 3(2-x)^2 + \sqrt{2}$$

mit $F(3) = 8$.

(3) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem in Abhängigkeit von r:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & r-3 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 4r-5 \end{array}$$

(4) Gegeben sind die drei Punkte $A(3|4|-1)$, $B(4|6|0)$ und $C(1|0|-3)$.

(a) (2 VP) Weisen Sie nach, dass die drei Punkte A, B und C auf einer Geraden g liegen.

(b) (1 VP) Geben Sie die Koordinaten eines weiteren Punktes D an, der ebenfalls auf der Geraden g liegt und vom Punkt A den gleichen Abstand hat wie B.

(c) (3 VP) Welcher Punkt auf g hat von $P(7|5|5)$ den kleinsten Abstand?

Geben Sie diesen Abstand an.

(5) Gegeben sind die Punkte $A(7|-3|5)$ und $B(4|1|5)$.

(a) (1 VP) Ermitteln Sie den Abstand der Punkte A und B.

(b) (1 VP) Zeigen Sie, dass die Gerade durch A und B echt parallel zur x_1x_2-Ebene ist.

(c) (2 VP) Gegeben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E an, welche durch den Mittelpunkt M_{AB} der Strecke $\overline{AB}$ geht und senkrecht auf AB steht.

(d) (1 VP) Geben Sie eine Gleichung der Geraden durch M_{AB}, welche senkrecht auf die x_1x_2-Ebene steht.

(e) (2 VP) Ermitteln Sie die Koordinaten eines Punktes C so, dass das Dreieck ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AB ist, das einen Flächeninhalt von 10 FE hat und senkrecht zur x_1x_2-Ebene steht.

(6) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist eine Ebene E_a gegeben durch

$$E_a : (2-2a)x_1 + 4x_2 + (a+1)x_3 = 3 + 7a.$$

(a) (1 VP) Bestimmen Sie a so, dass die Ebene E_a den Koordinatenursprung enthält.

(b) (1 VP) Untersuchen Sie, ob es einen Wert für a gibt, sodass E_a senkrecht zur x_1x_2-Ebene verläuft.

(c) (3 VP) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist eine Gerade g_c gegeben durch

$$g_c : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ c \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, für welche Werte von c und a

- die Gerade g_c in der Ebene E_a liegt;
- die Gerade g_c echt parallel zu E_a ist:
- die Gerade g_c die Ebene E_a schneidet.

(7) Gegeben ist ein Punkt $A(-7|7|-15)$ und eine Ebene $E : 4x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 1$.

(a) (3 VP) Bestimmen Sie den Lotfußpunkt von A auf E.

(b) (1 VP) Geben Sie eine Gleichung einer Geraden an, welche A enthält und parallel zu E verläuft.

Lösungen

(1) (2 VP) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktion f:

$$f(x) = 2x - xe^{-2x}.$$

(2) (2 VP) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von

$$f(x) = 3(2-x)^2 + \sqrt{2}$$

mit $F(3) = 8$.

(3) (I)-2(II): $x_2 - x_3 = 6 - 2r$;

(III) - 2(II): $x_3 = 2r + 1$. Damit folgt $x_2 = 7$, sowie $x_1 = x_2 + x_3 + r - 3 = 3r + 5$.

(4) (a) $g : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Punktprobe mit C: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist für $r = -2$ richtig; also liegt C auf g, und die drei Punkte sind kollinear.

(b) Man erhält D für $t = -1$: $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, also ist $D(2|2|-2)$.

(c) Lotebene $x_1 + 2x_2 + x_3 = 22$; schneiden mit g liefert $22 = 3 + r + 2(4 + 2r) - 1 + r = 10 + 6r$, also $r = 2$ und damit $L(5|8|1)$. Der Abstand ist gegeben durch $d = |\overrightarrow{PL}\,| = \sqrt{29}$.

(5) (a) $d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

(b) Die Höhe h des Dreiecks genügt der Gleichung $10 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h$; also ist $h = 4$. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist $M_{AB}(\frac{11}{2}|-1|5)$; die gesuchte Ecke C daher $C(\frac{11}{2}|-1|9)$.

(6) (a) Einsetzen liefert $3 + 7a = 0$, also $a = -\frac{3}{7}$.

(b) Der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2-2a \\ 4 \\ a+1 \end{pmatrix}$ muss senkrecht auf $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ stehen; dies liefert $a = -1$.

(c) Schneiden von g_c mit E_a; Einsetzen von

$$x_1 = -2 + t, \quad x_2 = c - 2t, \quad x_3 = 3 + t$$

in die Ebenengleichung liefert

$$(2 - 2a)(-2 + t) + 4(c - 2t) + (a + 1)(3 + t) = 3 + 7a,$$

also

$$t(a + 5) - 4c + 4 = 0.$$

- Im Falle $a = -5$ bleibt die Gleichung $4 - 4c = 0$. Ist $c = 1$, so liegt g_1 in E_{-5}; ist $c \neq 1$, ist g_c echt parallel zu E_{-5}.
- Im Falle $a \neq -5$ kann man die Gleichung nach t auflösen; in diesem Fall gibt es genau einen Schnittpunkt.

(7) (a) Lotgerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -15 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$; Schneiden ergibt die Gleichung

$$4(-7+4r) - 4(7-4r) + 7(-15+7r) = 1,$$

also $r = 2$ und damit $L(1|-1|-1)$.

(b) Richtungsvektor muss senkrecht auf $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ stehen, also etwa $\vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ -13 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.