MATHEMATIK K1

23.03.2023

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
Punkte (max)	2	2	3	10	5	7	1
Punkte							

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) (2 VP) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktion f:

$$f(x) = 2x \cdot e^{1-x^2} + \sqrt{2}.$$

(2) (2 VP) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von

$$f(x) = \pi \cos(\pi x) + \pi$$

mit $F(\frac{1}{2}) = 4$.

(3) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 15 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 15 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 26 \end{array}$$

(4) Gegeben ist die Gerade $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und der Punkt $P(-1|1|-1)$.

(a) (3 VP) Bestimmen Sie denjenigen Punkt Q auf g, der von P den kleinsten Abstand besitzt.

(b) (2 VP) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, welche g enthält und durch den Punkt P geht.

(1 VP) Berechnen Sie den Abstand des Ursprungs zu E.

(2 VP) Bestimmen Sie die Gleichung einer Ebene F, welche parallel zu E ist und von O doppelt so weit entfernt ist wie E.

(c) (2 VP) Bestimmen Sie einen Punkt R auf g so, dass das Dreieck PQR den Flächeninhalt 27 besitzt.

(5) Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 8$ und die Geradenschar

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

(a) (3 VP) Bestimmen Sie die gegenseitige Lage von g und E in Abhängigkeit von a.

(b) (2 VP) Die Gerade h schneidet g_2 orthogonal im Punkt $Q(5|-2|3)$ und verläuft parallel zu E. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h.

(6) Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E durch

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad E: 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11.$$

(a) (1 VP) Prüfen Sie, ob der Punkt $A(3|0|2)$ auf der Geraden g liegt.

(b) (1 VP) Zeigen sie, dass g orthogonal zur Ebene E steht.

(c) (2 VP) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B der Ebene E, von welchem A den kleinsten Abstand hat.

(2 VP) Bestimmen Sie diejenigen Punkte auf g, welche von E doppelt so weit enfernt sind wie A.

(d) (1 VP) Bestimmen Sie einen Punkt C in der Ebene E, für den das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

(7) Bestimmen Sie den Winkel, den Stunden- und Minutenzeiger einer analogen Uhr um 15:15 h bilden.

Lösungen

(1) Es ist
$$f'(x) = 2 \cdot e^{1-x^2} - 4x^2 e^{1-x^2}.$$

(2) Es ist
$$F(x) = \sin(\pi x) + \pi x + C.$$
Also folgt $4 = F(\frac{1}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} + C$, d.h. $C = 3 - \frac{\pi}{2}$.

(3) Es ist
$$x_1\begin{pmatrix}4\\-1\\5\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\15\\26\end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\5\\-11\end{pmatrix}$. Multiplikation der Vektorgleichung mit diesem Vektor liefert $-8x_1 = -16$, also $x_1 = 2$. Einsetzen ergibt
$$\begin{array}{rcrcrcr} 8 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 15 \\ -2 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 15 \\ 10 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 26 \end{array}$$
Addition der Gleichungen gibt $16 + 8x_3 = 56$, also $x_3 = 5$ und damit $x_2 = -1$.

(4) (a) Lotebene $x_1+2x_2-2x_3 = 3$. Schneiden liefert $3 = 1+t+2(-1+2t)-2(7-2t) = -15 + 9t$, also $t = 2$. Lotfußpunkt $Q(3|3|3)$.

(b) $E : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-6\\-3\end{pmatrix}$, also $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$. Damit wird $E : 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -3$.

(c) HNF: $\frac{2x_1-2x_2-x_3+3}{3} = 0$. $d(O, E) = 1$.

Einsetzen von $Q'(-2|2|-2)$ in $2x_1 - 2x_2 - x_3 = e$ liefert $e = -6$, also $F : 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -6$.

(c) Wegen $\overline{PQ} = 6$ muss auch $\overline{QR} = 9$ sein. Weil der Richtungsvektor von g Länge 3 hat, können wir $t = 5$ wählen und finden $R(6|9|-3)$.

(5) (a) Schneiden von g und E:
$$x_1 = 3 + 2t, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 1 + at$$
Einsetzen in E ergibt
$$\begin{aligned} 2(3 + 2t) + 2 \cdot (-2) - 2(1 + at) &= 8 \\ (4 - 2a)t &= 8 \\ (2 - a)t &= 4. \end{aligned}$$
Im Falle $a = 2$ ergibt sich $0 = 4$; dann sind Gerade und Ebene echt parallel. Im Falle $a \neq 2$ ist $t = \frac{4}{2-a}$, und dann schneiden sich g und E.

(b) Der Richtungsvektor von h ist $\vec{u} \times \vec{n} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$. Also ist $h : \begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

(6) (a) Punktprobe führt auf $t = 1$; der Punkt $A(3|0|2)$ liegt auf der Geraden g.

Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist parallel zum Normalenvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, also steht g senkrecht auf E.

(c) Schneiden der Lotgeraden g mit E liefert $t = \frac{1}{2}$, also $B(2|\frac{1}{2}|1)$.

Weil A zu $t = 1$ und B zu $t = \frac{1}{2}$ gehört, gehören die gesuchten Punkte zu $t = \frac{3}{2}$ und $t = -\frac{1}{2}$. Die Punkte sind daher $P_1(4| - \frac{1}{2}|3)$ und $P_2(0|\frac{3}{2}| - 1)$.

(d) Es genügt, irgendeinen Punkt $C \neq B$ in der Ebene zu wählen.

(7) Der Minutenzeiger steht um 15:15 h horizontal; der Stundenzeiger bewegt sich pro Stunde um $\frac{360°}{12} = 30°$, also jede Viertelstunde um 7,5°. Also ist der Winkel zwischen Stunden- und Minutenzeiger um 15:15 h gleich 7,5°.