MATHEMATIK K1

16.01.2023

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
Punkte (max)	3	4	3	2	4	5	9
Punkte							

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \dfrac{3}{5x} - \dfrac{2x^2}{x}$ b) $g(x) = xe^{x^2+2x}$

(2) Bestimmen Sie eine Stammfunktion der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \dfrac{2}{3x+1} - \dfrac{1}{(3x+1)^2}$ b) $g(x) = a(b-x)^4 + b^2$

(3) Lösen Sie die Gleichung

$$e^{3x} = 7e^{2x} + 8e^x.$$

(4) Zeigen Sie, dass $F(x) = -(x^2+1)e^{-x}$ eine Stammfunktion von $f(x) = (x-1)^2e^{-x}$ ist.

(5) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_1^{\frac{e+1}{2}} \frac{4}{2x-1}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^3 2\sqrt{4-x}\,dx$

(6) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{9-x}$. Seien A und B die Schnittpunkte des Schaubilds mit den Koordinatenachsen. Das Schaubild von f und die Gerade durch A und B begrenzen eine Fläche. Bestimmen Sie deren Inhalt.

(7) Nach der Einnahme eines Medikaments geht der Wirkstoff des Medikaments in das Blut über, wobei sich die Konzentration des Wirkstoffs im Blut mit der Zeit verändert. Die Änderungsrate der Konzentration wird für $0 \leq t \leq 6$ durch die Funktion f mit

$$f(t) = \frac{3}{4}t^2 - 6t + 9$$

beschrieben (t in Stunden seit Beginn der Einnahme, f in μg pro Liter und Stunde). Vor der Einnahme ist kein Wirkstoff im Blut enthalten.

(a) Skizzieren Sie das Schaubild von f in einem geeigneten Koordinatensystem.

(b) Geben Sie die Änderungsrate der Konzentration bei Beobachtungsbeginn an.

(c) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Konzentration des Wirkstoffs maximal ist.

(d) Berechnen Sie die Konzentration des Wirkstoffs in μg/h nach 2 Stunden.

(e) Geben Sie einen integralfreien Term für die Konzentration des Wirkstoffs nach t Stunden an.

(f) Berechnen Sie, wann die Konzentration am stärksten abnimmt.

Lösungen

(1) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{3}{5x^2} - 2 \\ g'(x) &= e^{x^2+2x} + x(2x+2)e^{x^2+2x} \end{aligned}$$

(2) Bestimmen Sie eine Stammfunktion der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{2}{3}\ln(3x+1) + \frac{1}{3(3x+1)} \\ G(x) &= -\frac{a}{5}(b-x)^5 + b^2x \end{aligned}$$

(3) Lösen Sie die Gleichung

$$\begin{aligned} e^{3x} &= 7e^{2x} + 8e^x \\ e^{3x} - 7e^{2x} - 8e^x &= 0 \\ e^x(e^{2x} - 7e^x - 8) &= 0 \\ e^x(e^x - 8)(e^x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Die Gleichungen $e^x = 0$ und $e^x = -1$ haben keine Lösung. $e^x = 8$ führt auf $x_1 = \ln(8)$.

(4) Wir finden

$$F'(x) = -2xe^{-x} + (x^2+1)e^{-x} = (x^2 - 2x + 1)e^{-x} = (x-1)^2e^{-x}.$$

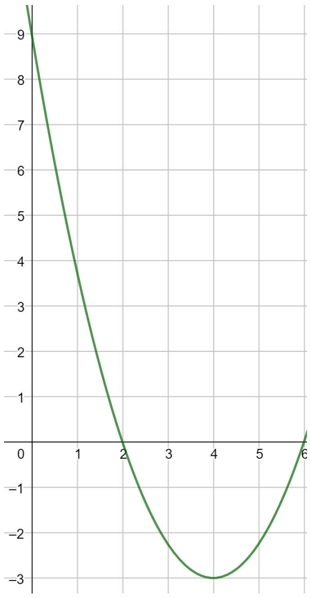
(5) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\begin{aligned} &\int_1^{\frac{e+1}{2}} \frac{4}{2x-1}\,dx = 2\ln(2x-1)\Big|_1^{\frac{e+1}{2}} = 2\ln\Big(2\frac{e+1}{2} - 1\Big) - 2\ln(1) = 2\ln(e) = 2, \\ &\int_0^3 2\sqrt{4-x}\,dx = -\frac{4}{3}\sqrt{4-x}\Big|_0^3 = -\frac{4}{3} + \frac{8}{4} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

(6) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sind $A(0|3)$ und $B(9|0)$. Die Gerade durch A und B hat die Gleichung $g(x) = 3 - \frac{x}{3}$. Also ist die gesuchte Fläche gleich

$$\begin{aligned} \int_0^9 [f(x) - g(x)]\,dx &= \int_0^9 [\sqrt{9-x} - 3 + \tfrac{x}{3}]\,dx \\ &= -\frac{2}{3}\sqrt{9-x} - 3x + \frac{x^2}{6}\Big|_0^9 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

(7) (a) Skizze des Schaubilds von f:



(b) $f(0) = 9$; die Änderungsrate beträgt 9 μg pro Liter und Stunde.

(c) Wirkstoffkonzentration maximal: Nullstelle von f ergibt $t_1 = 2$ und $t_2 = 6$. Wegen $f'(t) = \frac{3}{2}t - 6$ ist $f'(2) = -3 < 0$, folglich liegt ein Maximum vor.

(d) Konzentration nach 2 Stunden:

$$\int_0^2 f(t)\,dt = \frac{1}{4}t^3 - 3t^2 + 9t\Big|_0^2 = 8.$$

Die Konzentration beträgt 8 μg/L.

(e)

$$F(t) = \frac{1}{4}t^3 - 3t^2 + 9t$$

wegen $F(0) = 0$.

(f) Stärkste Abnahme von F ist Minimum von f, also $f'(t) = \frac{3}{2}t - 6 = 0$. Also ist $t = 4$, und die Konzentration nimmt nach 4 h am stärksten ab.