# K1 BASIS ÜBUNGEN ABLEITUNG UND INTEGRAL

F. LEMMERMEYER

Bei der KA geht es um Ableitungen (Produkt- und Kettenregel), Stammfunktionen, Stammfunktionen durch einen Punkt, Integrale, Flächen, und Exponentialgleichungen .

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen:

a) $f(x) = 3(4-2x)^5$   b) $g(x) = \sqrt{1-4x}$

c) $h(x) = \dfrac{e^x}{x}$   d) $k(t) = tx$

(2) Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $e^{2x} = 4$   b) $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$

c) $3e^{1-2x} = 15$   d) $xe^{2x} - xe^x = 0$

(3) Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{4}{x^3}$   b) $g(x) = 2e^{3-2x} + x$

c) $h(x) = 8\sqrt{3x}$   d) $p(x) = \pi\cos(\pi x) + \sqrt{2}$

(4) Geben Sie drei verschiedene Stammfunktionen der Funktion $f$ mit $f(x) = 2x + 1$ an.

(5) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion $F$ von $f$, welche durch den Punkt $P(1|3)$ geht:

a) $f(x) = 3x + 1$   b) $f(x) = 2\sin(\pi x)$

c) $f(x) = 4e^{2-2x}$   d) $f(x) = 3\sqrt{2x-1}$

(6) Berechnen Sie folgende Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 (x^2 - 1)\,dx$   b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{3}{x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 (2e^{1-x} + 1)\,dx$   d) $\displaystyle\int_2^8 \frac{2}{\sqrt{2x}}\,dx$

(7) Bestimmen Sie die Fläche, welche vom Schaubild von $f$ und der $x$-Achse eingeschlossen wird.

a) $f(x) = 4 - x^2$  b) $f(x) = x^3 - 3x^2$

(8) Bestimmen Sie die Fläche, welche von den Schaubildern von $f$ und $g$ eingeschlossen wird.

(a) $f(x) = x^2 + 4x$, $g(x) = -x$.

(b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{x}{2}$.

## Lösungen

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen:

a) $f(x) = 3(4-2x)^5$ b) $g(x) = \sqrt{1-4x}$

c) $h(x) = \dfrac{e^x}{x}$ d) $k(t) = tx$

a) $f'(x) = -30(4-2x)^4$ b) $g'(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{1-4x}}$

c) $h'(x) = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{e^x}{x^2}$ d) $k'(t) = x$

(2) Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $e^{2x} = 4$ b) $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$

c) $3e^{1-2x} = 15$ d) $xe^{2x} - xe^x = 0$

a) $x_1 = \frac{1}{2}\ln(4)$ b) $x_1 = 0, x_2 = \ln(4)$

c) $x_1 = \frac{1}{2}(1-\ln(5))$ d) $x_1 = 0$

(3) Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{4}{x^3}$ b) $g(x) = 2e^{3-2x} + x$

c) $h(x) = 8\sqrt{3x}$ d) $p(x) = \pi\cos(\pi x) + \sqrt{2}$

a) $F(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}$ b) $G(x) = -e^{3-2x} + \frac{1}{2}x^2$

c) $H(x) = \frac{16}{9}\sqrt{3x}^3$ d) $P(x) = \sin(\pi x) + \sqrt{2} \cdot x$

(4) Geben Sie drei verschiedene Stammfunktionen der Funktion $f$ mit $f(x) = 2x+1$ an.

$F_1(x) = x^2 + x,\ F_2(x) = x^2 + x + 1,\ F_3(x) = x^2 + x + 2.$

(5) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion $F$ von $f$, welche durch den Punkt $P(1|3)$ geht:

a) $f(x) = 3x + 1$ b) $f(x) = 2\sin(\pi x)$

c) $f(x) = 4e^{2-2x}$ d) $f(x) = 3\sqrt{2x-1}$

a) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ b) $F(x) = -\frac{2}{\pi}\cos(\pi x) + 3 - \frac{2}{\pi}$

c) $F(x) = -2e^{2-2x} + 5$ d) $F(x) = \sqrt{2x-1}^3 + 2$

(6) Berechnen Sie folgende Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 (x^2 - 1)\,dx = -\frac{2}{3}$ b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{3}{x^2}\,dx = \frac{9}{4}$

c) $\displaystyle\int_0^1 (2e^{1-x} + 1)\,dx = 2e - 1$ d) $\displaystyle\int_2^8 \frac{2}{\sqrt{2x}}\,dx = 4$

(7) Bestimmen Sie die Fläche, welche vom Schaubild von $f$ und der $x$-Achse eingeschlossen wird.

a) $f(x) = 4 - x^2$ b) $f(x) = x^3 - 3x^2$

(a) Schnittstellen mit der $x$-Achse: $4-x^2 = 0$ liefert $x_{1,2} = \pm 2$. Wegen $f(0) = 4$ ist das Schaubild oberhalb der $x$-Achse, also ist die Fläche gleich

$$\int_{-2}^2 (4 - x^2)\,dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^2 = \frac{32}{3}.$$

(b) Schnittstellen mit der $x$-Achse: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Wegen $f(1) = -2$ ist das Schaubild unterhalb der $x$-Achse, also wird das Integral negativ sein:

$$\int_0^3 (x^3 - 3x^2)\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3\Big|_0^3 = -\frac{27}{4}.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist $A = \frac{27}{4}$

(8) Bestimmen Sie die Fläche, welche von den Schaubildern von $f$ und $g$ eingeschlossen wird.

(a) $f(x) = x^2 + 4x$, $g(x) = -x$.

(b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{x}{2}$.

(a) Schnittstellen: $f(x) = g(x)$ liefert $x^2+5x = 0$, also $x_1 = -5$ und $x_2 = 0$. Wegen $f(-1) = -3$ und $g(-1) = 1$ ist $g$ oben.

$$\int_{-5}^{0} [g(x) - f(x)]\, dx = \int_{-5}^{0} [-x^2 - 5x]\, dx$$
$$= -\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}\Big|_{-5}^{0} = \frac{125}{6}.$$

(b) Schnittstellen: $f(x) = g(x)$ liefert $\sqrt{x} = \frac{x}{2}$, also $x = \frac{x^2}{4}$ und $x(\frac{x}{4} - 1) = 0$. Also ist $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$. Wegen $f(1) = 1$ und $g(1) = \frac{1}{2}$ ist $f$ oben.

$$\int_{0}^{4} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{0}^{4} \left[\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right] dx$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{x}^3 - \frac{x^2}{4}\Big|_{0}^{4} = \frac{4}{3}.$$