K1 BASIS KLAUSUR

08.05.2023

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Punkte (max)	2	2	3	6	5	3	6	3
Punkte								

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = e^{x+1} \cdot \cos(-4x).$$

(2) Berechnen Sie das Integral

$$\int_2^3 \frac{1}{(2x-3)^2}\, dx.$$

(3) Lösen Sie die Gleichung

$$4x^3 = 12x^2 + 72x.$$

(4) Gegeben sind die Punkte $A(5|3|0)$, $B(6|5|-2)$ und $C(7|4|2)$.

(a) (2 VP) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, welche A, B und C enthält.

(Mögliches Ergebnis: $E: 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 4$)

(b) (2 VP) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig ist.

(1 VP) Bestimmen Sie weiter den Punkt D, der mit A, B und C ein Quadrat bildet.

(c) (1 VP) Es gibt eine Gerade h, welche auf E senkrecht steht und von der die Punkte A, B, C und D alle denselben Abstand haben. Bestimmen Sie eine Gleichung von h.

(5) Gegeben ist die Ebene $E_k : 8x_1 + kx_2 - x_3 = 10$, sowie die Punkte $A(1|2|6)$ und $B(10|3|1)$.

(a) (1 VP) Bestimmen Sie k so, dass A auf der Ebene E_k liegt.

(b) (3 VP) Berechnen Sie den Abstand des Punktes B zur Ebene E_4.

(c) (1 VP) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes C, der von E_4 doppelt so weit entfernt ist wie B.

(6) Die Ebenen E und F sind gegeben durch

$$E : 2x_1 + 3x_3 = 12 \quad \text{und} \quad F : 5x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 20.$$

Stellen Sie die Ebenen in einem Koordinatensystem dar und zeichnen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen ein.

(7) Gegeben sind die Punkte $P(2|3|8)$ und $Q(4|5|12)$, sowie die Ebene $E : -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7$.

(a) (1 VP) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g durch P und Q.

(b) (2 VP) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von E und g.

(c) (1 VP) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F, welche g und den Ursprung enthält.

(d) (1 VP) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene H, welche g enthält und zu E orthogonal ist.

(e) (1 VP) Wo liegen alle Geraden, welche von E denselben Abstand haben wie g?

(8) (3 VP) Bestimmen k so, dass der Vektor $\begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 1 \end{pmatrix}$

(a) Länge 9 besitzt;

(b) parallel zu $\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist;

(c) orthogonal zu $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist.

Lösungen

(1) Es ist
$$f'(x) = e^{x+1} \cdot \cos(-4x) + 4e^{x+1} \cdot \sin(-4x).$$

(2) Es ist
$$\int_2^3 \frac{1}{(2x-3)^2}\,dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-3}\Big|_2^3 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{5}{6}.$$

(3) Man findet
$$\begin{aligned} 4x^3 &= 12x^2 + 72x && \Big|\ -12x^2 - 72x \\ 4x^3 - 12x^2 - 72x &= 0 && \Big|\ \text{Ausklammern} \\ 4x(x^2 - 3x - 18) &= 0 \end{aligned}$$

Der erste Faktor ergibt $x_1 = 0$, die Gleichung $x^2 - 3x - 18 = (x-6)(x+3) = 0$ hat die Lösungen $x_2 = 6$ und $x_3 = -3$.

(4) a) Parametergleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Kreuzprodukt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ebenengleichung $E : 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 4$.

b) Wir finden
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, & |\overrightarrow{AB}| &= 3, \\ \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, & |\overrightarrow{AC}| &= 3, \\ \overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, & |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{18}, \end{aligned}$$

Wegen $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ ist das Dreieck gleichschenklig, wegen $3^2 + 3^2 = \sqrt{18}^2$ rechtwinklig in A.

c) Ergänzen zum Quadrat: weil der rechte Winkel in A sitzt, muss $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ sein, also $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-7 \\ 6-4 \\ 0-2 \end{pmatrix}$ und damit $D(8|6|0)$.

d) Die Gerade muss durch den Mittelpunkt $M_{BC} = M_{AD}$ des Quadrats gehen, also durch $M(6{,}5|4{,}5|0)$. Der Richtungsvektor muss Vielfaches des Normalenvektors $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sein. Also ist $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 4{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(5) a) A einsetzen ergibt $8+2k-6=10$, also $k=4$.

b) Lotgerade durch B ist $\ell:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\3\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}8\\4\\-1\end{pmatrix}$. Schneiden mit $E_4: 8x_1+4x_2-x_3=10$ liefert $r=-1$, also den Lotfußpunikt $L(2|-1|2)$. Der gesuchte Abstand ist $|\overrightarrow{PL}|=\sqrt{8^2+4^2+1^2}=9$.

c) Skizze! B muss Mittelpunkt von C und L sein:

$$\begin{array}{rrcrcrl} L(& 2 & | & -1 & | & 2 &) \\ B(& 10 & | & 3 & | & 1 &) \\ C(& 18 & | & 7 & | & 0 &) \end{array}$$

Also ist $C(18|7|0)$.

(6) Spurpunkte von E sind $S_1(6|0|0)$, $S_2(0|4|0)$, die von F sind $S_1(4|0|0)$, $S_2(0|2|0)$ und $S_3(0|0|5)$.

(7) a) $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\8\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$.

b) Einsetzen liefert $16=7$: Gerade und Ebene sind echt parallel.

c) $\vec{x}=s\begin{pmatrix}2\\3\\8\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$.

d) $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\8\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$.

e) In einer Ebene parallel zu E, welche g enthält, oder in der dazugehörigen an E gespiegelten Ebene.

(8) a) $k^2+4k^2+1=9^2$ liefert $k=\pm 4$.

b) Für $k=2$ ist $\begin{pmatrix}k\\2k\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}6\\12\\3\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$.

c) Aus $0=\begin{pmatrix}k\\2k\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}=2k+2k+4$ folgt $k=-1$.