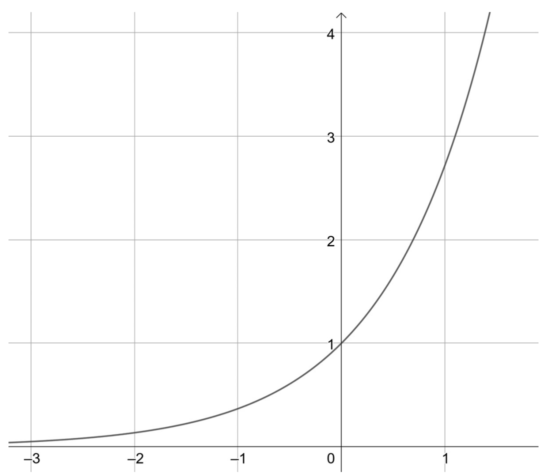
# K1 BASISFACH EXPONENTIALFUNKTION

F. LEMMERMEYER

## Die Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ (mit $e = 2{,}71828\ldots$) hat folgende Eigenschaften:

- $e^a \cdot e^b = a^{a+b}$ (Potenzgesetze); insbesondere ist $e^x \cdot e^x = 2^{2x}$.
- Es ist $e^0 = 1$ und $e^1 = e$.
- Die Exponentialfunktion bleibt beim Ableiten erhalten:
$$f'(x) = e^x.$$
- Die Exponentialfunktion nimmt nur positive Werte an: $e^x = 0$. Insbesondere sind die Gleichungen $e^x = 0$ und $e^x = -2$ nicht lösbar.



## Ableitungen und Stammfunktionen

Die Funktion $f(x) = ae^{bx+c}$ wird abgeleitet, indem man sie abschreibt und mit der inneren Ableitung multipliziert:

$$f'(x) = ae^{bx+c} \cdot b = abe^{bx+c}.$$

Ganz entsprechend erhält man eine Stammfunktion, indem man $f$ abschreibt und durch die innere Ableitung teilt:

$$F(x) = ae^{bx+c} \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \cdot e^{bx+c}.$$

(1) Bestimme die erste Ableitung $f$ und eine Stammfunktion $F$ folgender Funktionen:

| $F$ | $f$ | $f'$ |
|---|---|---|
| | $e^x$ | |
| | $e^{2x}$ | |
| | $e^{-x}$ | |
| | $e^{3-2x}$ | |
| | $4e^{1-5x}$ | |
| | $3e^{-x} - x$ | |
| | $2e^{1-4x} + 1$ | |

(2) Bestimme die erste Ableitung folgender Funktionen.

| $f$ | $f'$ |
|---|---|
| $f(x) = x \cdot e^{2-x}$ | |
| $f(x) = \sin(x) \cdot e^{2-x}$ | |
| $f(x) = 2x^2e^{3-x}$ | |
| $f(x) = \sin(2x)e^{2x-1}$ | |

## Gleichungen

Die Umkehrfunktion von $f(x) = e^x$ ist der natürliche Logarithmus $g(x) = \ln(x)$. Damit ist $e^{\ln(x)} = x$ und $\ln(e^x) = x$. Die Gleichungen $e^1 = e$ und $e^0 = 1$ entsprechen $\ln(e) = \ln(e^1) = 1$ und $\ln(1) = \ln(e^0) = 0$.

Gleichungen der Form $ae^{bx+c} + d = e$ löst man, indem man auf beiden Seiten $-d$ und dann $: a$ macht, dann den Logarithmus anwendet, die Hochzahl nach vorne zieht, und dann nach $x$ auflöst:

$$\begin{aligned}
ae^{bx+c} + d &= e \\
ae^{bx+c} &= e - d \\
e^{bx+c} &= \frac{e-d}{a} \\
\ln(e^{bx+c}) &= \ln\left(\frac{e-d}{a}\right) \\
bx + c &= \ln\left(\frac{e-d}{a}\right) \\
bx &= \ln\left(\frac{e-d}{a}\right) - c \\
x &= \frac{\ln\left(\frac{e-d}{a}\right) - c}{b}
\end{aligned}$$

Dabei kann man den Logarithmus nur auf positive Zahlen anwenden.

Gleichungen der Form $ae^{2x} + be^x + c = 0$ löst man durch Substitution $e^x = z$ oder, falls $a = 1$ ist, mit dem Satz von Vieta.

(1) Löse folgende Gleichungen:

a) $2e^{2x} = 4$

b) $1{,}5e^{1-2x} + 1 = 7$

c) $3e^{4x-1} + 5 = 4$

d) $1 - 5e^{3x} = 11$

(2) Löse folgende Gleichungen:

a) $e^{2x} - 7e^x + 6 = 0$

b) $(e^{2x} - 4)(x^2 - 9) = 0$

c) $xe^{2x} - 5xe^x = 6x$

d) $e^{3x} - 6e^{2x} + 8e^x = 0$