MATHEMATIK K1

ÜBUNGEN 10.11.2021

(1) Bestimme jeweils die erste Ableitung f' von f und vereinfache so weit wie möglich.

a) $f(x) = (x^2 + x)^4 e^{-x}$ b) $f(x) = \dfrac{e^x}{2x}$

c) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ d) $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{e^{2x}}$

(2) Bestimme jeweils die erste Ableitung f' von f und vereinfache so weit wie möglich.

a) $f(x) = ae^x + b$ b) $f(x) = e^{2\sqrt{x}}$

c) $f(x) = e^{bx} \cdot e^{a-bx}$ d) $f(x) = e^{2\sin(2x)}$

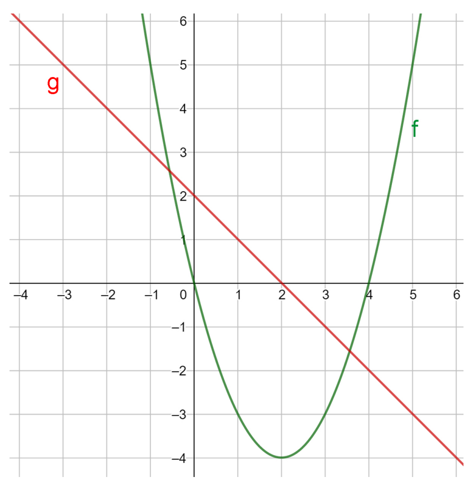
(3) Löse folgende Gleichungen.

a) $3e^{2-x} - 4 = 32$ b) $e^{3x} - 7e^{2x} = 8e^x$

c) $e^{-\sin(x)} = 0$ d) $e^{6x} - 4e^{3x} + 3 = 0$

(4) Gegeben sind die Schaubilder zweier Funktionen f und g. Weiter ist $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ und $k(x) = f(g(x))$.

(a) Bestimmen Sie $h(3)$ und $k(3)$.
(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von h.
(c) Bestimmen Sie die Nullstellen von k.
(d) Bestimmen Sie $h'(2)$ und $k'(0)$.



Lösungen

(1) *Bestimme jeweils die erste Ableitung f':*

(a) $f'(x) = 4(x^2+x)^3(2x+1)e^{-x} - (x^2+x)^4 e^{-x}$.

(b) $f'(x) = \frac{2xe^x - 2e^x}{4x^2} = \frac{xe^x - e^x}{2x^2}$

(c) $f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

(d) $f'(x) = \frac{2\cos(2x)e^{2x} - 2\sin(2x)e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{2\cos(2x) - 2\sin(2x)}{e^{2x}}$

(2) *Bestimme jeweils die erste Ableitung f':*

(a) $f'(x) = ae^x$

(b) $f'(x) = \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

(c) $f'(x) = 0$, denn $f(x) = e^a$ (Potenzgesetze!)

(d) $f'(x) = 4\cos(2x) \cdot e^{2\sin(2x)}$

(3) *Löse folgende Gleichungen:*

a) Gleichung hat nur ein x, also den Rest wegzwiebeln:

$$\begin{aligned}
3e^{2-x} - 4 &= 32 && \Big|\; e+4 \\
3e^{2-x} &= 36 && \Big|\; :3 \\
e^{2-x} &= 12 \\
\ln(e^{2-x}) &= \ln(12) \\
2 - x &= \ln(12) && \Big|\; -2 \\
-x &= \ln(12) - 2 && \Big|\; \cdot(-1) \\
x &= 2 - \ln(12)
\end{aligned}$$

b) Alles auf eine Seite, Ausklammern, Substitution:

$$\begin{aligned}
e^{3x} - 7e^{2x} &= 8e^x && \Big|\; -8e^x \\
e^{3x} - 7e^{2x} - 8e^x &= 0 \\
e^x(e^{2x} - 7e^x - 8) &= 0 \\
e^x(e^x - 8)(e^x + 1) &= 0
\end{aligned}$$

Substitution $e^x = z$ statt Vieta geht natürlich auch).

- $e^x = 0$ hat keine Lösung
- $e^x = 8$ hat die Lösung $x_1 = \ln(8)$;
- $e^x = -1$ hat keine Lösung.

c) $e^{-\sin(x)} = 0$ hat keine Lösung (e-Funktion nimmt nur positive Werte an).

d) Substitution $e^{3x} = z$ oder Vieta:

$$(e^{3x} - 1)(e^{3x} - 3) = 0$$

liefert wie Substitution die beiden Gleichungen $e^{3x} = 1$ und $e^{3x} = 3$.

- $e^{3x} = 1$ hat die Lösung $x = 0$.
- $e^{3x} = 3$ liefert $3x = \ln(3)$, also $x = \frac{1}{3}\ln(3)$.

(4) *Gegeben sind die Schaubilder zweier Funktionen f und g. Weiter ist $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ und $k(x) = f(g(x))$.*

(a) *Bestimmen Sie $h(3)$ und $k(3)$.*

Es ist $h(3) = f(3) \cdot g(3) = (-3) \cdot (-1) = 3$, sowie $k(3) = f(g(3)) = f(-1) = 5$.

(b) *Bestimmen Sie die Nullstellen von h.*

Aus $0 = h(x) = f(x) \cdot g(x)$ folgt mit dem Satz vom Nullprodukt $f(x) = 0$ oder $g(x) = 0$; die Nullstellen von f und g (und damit von h) sind $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ und $x_3 = 2$.

(c) *Bestimmen Sie die Nullstellen von k.*

Es soll $k(x) = f(g(x)) = 0$; setzt man $g(x) = u$, soll also $f(u) = 0$ sein. Also muss $u = 0$ oder $u = 4$ gelten. Dies liefert $g(x) = 0$ oder $g(x) = 4$, also $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.

(d) *Bestimmen Sie $h'(2)$ und $k'(0)$.*

Produktregel: $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, also $h'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2)$. Nun ist $f'(2) = 0$ (waagrechte Tangente im Tiefpunkt, also Steigung 0), $g(2) = 0$, $f(2) = -4$ und $g'(2) = -1$ (die Gerade hat überall Steigung -1; notfalls Steigungsformel $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ benutzen). Also ist $h'(2) = 4$.

Kettenregel: $k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, also $k'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0)$; wegen $g(0) = 2$ und $f'(2) = 0$ wie oben erhält man $k'(0) = 0$.

Zur Kontrolle: f hat die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$, und f ist eine quadratische Funktion; der Ansatz $f(x) = ax(x-4)$ nebst Einsetzen von $f(1) = -3$ liefert $a = 1$ und damit $f(x) = x^2 - 4x$; mit $g(x) = 2 - x$ finden wir also

$$h(x) = (x^2 - 4x) \cdot (2 - x) = -x^3 + 6x^2 - 8x = -x(x-2)(x-4),$$
$$k(x) = (2-x)^2 - 4(2-x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2).$$

Also ist $h(3) = (-3) \cdot (-1) = 3$ und $k(3) = 5$. Die Nullstellen von h und k kann man direkt ablesen. Wegen $h'(x) = -3x^2 + 12x - 8$ ist $h'(2) = 4$.