ABLEITEN MIT DER PRODUKTREGEL

F. LEMMERMEYER

(1) Bestimmen Sie die jeweils erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x \cdot (x-2)^3$ b) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x^2+1}$

c) $f(x) = (1-x)^5 \cdot (1+x)^5$ d) $f(x) = x^2 - x^2 \cdot (1-x)^2$

(2) Bestimmen Sie die jeweils erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2x \cdot \sin(x)$ b) $f(x) = 3x^2 \cdot \cos(2x)$

c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \cos(2x+1)$ d) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin(x)$

(3) Bestimmen Sie die jeweils erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ b) $f(x) = \sin(x) \cdot (\cos(x))^2$

c) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x^2)$ d) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

(4) Bestimmen Sie die jeweils erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = (1-x)^3(2x-3)^4$ b) $f(x) = \sqrt{2x+3} \cdot (2-x)^4$

c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot x$ d) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (2x+1)$

(5) Bestimmen Sie die jeweils erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{2x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(6) Bestimmen Sie die jeweils erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x \cdot u(x)$ b) $f(x) = x^2 \cdot u(x)$

c) $f(x) = 2x \cdot u(2x)$ d) $f(x) = u(2x) \cdot v(3x)$

Lösungen

(1)

$$
\begin{aligned}
a) \qquad & f'(x) = 1 \cdot (x-2)^3 + x \cdot 3(x-2)^2 \cdot 1 \\
& \quad = (x-2)^3 + 3x(x-2)^2 \\
b) \qquad & f'(x) = 2x \cdot \sqrt{x^2+1} + x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \\
& \quad = 2x \cdot \sqrt{x^2+1} + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} \\
c) \qquad & f'(x) = -5(1-x)^4 \cdot (1+x)^5 + 5(1-x)^5(1+x)^4 \\
d) \qquad & f'(x) = 2x - (2x(1-x)^2 + x^2 \cdot 2(1-x) \cdot (-1)) \\
& \quad = 2x - 2x(1-x)^2 + 2x^2(1-x)
\end{aligned}
$$

Bei c) könnte man auch erst (mit der 3. binomischen Formel) umformen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1-x)^5 \cdot (1+x)^5 = (1-x^2)^5, \\
f'(x) &= 5(1-x^2)^4 \cdot (-2x) = -10x(1-x^2)^4.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
a) \qquad & f'(x) = 2\sin(x) + 2x\cos(x) \\
b) \qquad & f'(x) = 6x\cos(2x) - 6x^2\sin(x) \\
c) \qquad & f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(2x+1) - 2\sqrt{x}\sin(2x+1) \\
d) \qquad & f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \sin(x) + \frac{1}{x} \cdot \cos(x)
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
a) \qquad & f'(x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 \\
b) \qquad & f'(x) = (\cos(x))^3 - 2(\sin(x))^2\cos(x) \\
c) \qquad & f'(x) = \cos(x)\cos(x^2) - 2x\sin(x)\sin(x^2) \\
d) \qquad & f'(x) = \cos(x) \cdot (\cos(x))^{-1} - \sin(x)(\cos(x))^{-2} \\
& \quad = 1 - \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^2}
\end{aligned}
$$

Bei d) kann man auch die Quotientenregel benutzen:

$$f'(x) = \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2}$$

wegen $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ (trigonometrischer Satz des Pythagoras).

(4)

$$\begin{aligned}
&a) && f'(x) = -3(1-x)^2(2x-3)^4 + 8(1-x)^3(2x-3)^3 \\
&b) && f'(x) = \frac{(2-x)^4}{\sqrt{2x+3}} - 4\sqrt{2x+3}\cdot(2-x)^3 \\
&c) && f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot x + \sqrt{x} = \frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \\
&d) && f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(2x+1) + 2\sqrt{x}
\end{aligned}$$

4c) geht einfacher so: $f(x) = \sqrt{x}\cdot x = x^{\frac{1}{2}}\cdot x^1 = x^{\frac{3}{2}}$, also $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

(5) Ohne Quotientenregel:

$$\begin{aligned}
&a) && f(x) = x^{-1}\sin(x) \\
& && f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot\sin(x) + \frac{1}{x}\cdot\cos(x) \\
&b) && f(x) = \frac{1}{2}x^{-1}\cos(2x) \\
& && f'(x) = -\frac{1}{2x^2}\cdot\cos(2x) - \frac{1}{x}\cdot\sin(2x) \\
&c) && f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x} \\
& && f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \\
&d) && f(x) = x(x^2+1)^{-1} \\
& && f'(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

Mit Quotientenregel:

$$a) \qquad f'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

$$b) \qquad f'(x) = \frac{-4x\sin(2x) - 2\cos(2x)}{4x^2} = \frac{-2x\sin(2x) - \cos(2x)}{2x^2}$$

$$c) \qquad f'(x) = \frac{2x^2 - (x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$d) \qquad f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

(6)

$$a) \qquad f'(x) = u(x) + x \cdot u'(x)$$

$$b) \qquad f'(x) = 2x \cdot u(x) + x^2 \cdot u'(x)$$

$$c) \qquad f'(x) = 2u(2x) + 4x \cdot u'(2x)$$

$$d) \qquad f'(x) = 2u'(2x) \cdot v(3x) + 3u(2x) \cdot v'(3x)$$