MATHEMATIK K1

10.02.2022

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Punkte (max)	2	3	3	3	3	7	2	4	5
Punkte									

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = x^2 - x \cdot \sin(x)$$

(2) Bestimmen Sie $k > 0$ so, dass

$$\int_2^k \frac{1}{\sqrt{2x}} = 4$$

wird.

(3) Lösen Sie die Gleichung

$$\frac{2}{x^4} + 2 = \frac{5}{x^2}.$$

(4) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & = & 5 \end{array}$$

(5) Zeichnen Sie die beiden Ebenen $E : x_1 + 2x_2 = 4$ und $F : x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$ in einem geeigneten Koordinatensystem.

(6) Gegeben sind die Punkte $A(5|1|1)$, $B(3|3|1)$ und $C(3|1|3)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene, welche dieses Dreieck enthält.

c) Die Gerade m ist die Mittelsenkrechte der Seite AB des Dreiecks ABC. Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden m.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts D auf der Geraden m so, dass das Dreieck ABD den Flächeninhalt $\sqrt{48}$ hat.

(7) Gegeben sind die Ebene $E : 4x_1 + 8x_2 - x_3 = -5$ und die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie a so, dass die Gerade g parallel zur Ebene E ist.

b) Untersuchen Sie, ob es ein a gibt, für das die Gerade g in der Ebene E liegt.

(8) Gegeben sind die Ebene E und die Gerade g mit

$$E : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \quad \text{und} \quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass g zu E parallel ist, aber nicht in E liegt.

b) Die Gerade h schneidet g orthogonal im Punkt $Q(5|-2|3)$ und verläuft ebenfalls parallel zu E. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h.

(9) Gegeben sind die Geraden g_a und h mit

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Beschreiben Sie die besondere Lage der Geraden h im Koordinatensystem.

Gibt es ein a, sodass g_a und h dieselbe Gerade darstellen?

b) Alle Geraden g_a liegen in einer Ebene E. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.

(1) Es ist
$$f'(x) = 2x - sin(x) - x\cos(x).$$

(2) Wir finden
$$\int_2^k \frac{1}{\sqrt{2x}} = \sqrt{2x}\,\Big|_2^k = \sqrt{2k} - 2 = 4,$$
also $\sqrt{2k} = 6$ und damit $2k = 36$, also $k = 18$.

(3) Hier ist
$$\begin{aligned} \frac{2}{x^4} + 2 &= \frac{5}{x^2} && \Big| \cdot x^4 \\ 2x^4 + 2 &= 5x^2 && \Big| - 5x^2 \\ 2x^4 - 5x^2 + 2 &= 0 \\ (x^2-2)(2x^2-1) &= 0 \end{aligned}$$
Also ist $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ und $x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

(4) Es ist
$$x_1\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\\5\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\\-5\end{pmatrix}.$$
Multiplikation der Gleichung mit dem Kreuzprodukt liefert $x_3 = 2$. Damit ist dann $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$.

(5) Zeichnen Sie die beiden Ebenen $E : x_1 + 2x_2 = 4$ und $F : x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$ in einem geeigneten Koordinatensystem.

(6) Gegeben sind die Punkte $A(5|1|1)$, $B(3|3|1)$ und $C(3|1|3)$.

a) Wir finden
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}, & |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{8}, \\ \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}, & |\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{8}, \\ \overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}, & |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{8}. \end{aligned}$$
Also ist das Dreieck gleichseitig.

b) Offenbar ist $x_1 + x_2 + x_3 = 7$.

c) Es ist $M_{AB}(4|2|1)$ und $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$, also $m : \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

d) Die Mittelsenkrechte ist gleichzeitig die Höhe, weil das Dreieck gleichseitig ist. Also ist $g = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8}$. Damit muss $h = 2\sqrt{6}$ sein wegen $\sqrt{48} = \frac{1}{2}gh$. Weil der Richtungsvektor der Geraden m Länge $\sqrt{6}$ besitzt, erhält man die fesuchten Punkte D durch Einsetzen von $t = \pm 2$ in m. Für $t = 2$ erhält man beispielsweise $D(2|0|5)$.

(7) Gegeben sind die Ebene $E : 4x_1 + 8x_2 - x_3 = -5$ und die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = 4 + 8a - 1 = 0$ ergibt $a = -\frac{3}{8}$.

b) Dies geht nur, wenn $a = -\frac{3}{8}$ ist. In diesem Fall erhält man durch Schneiden aber

$$-5 = 4r + 8(1 + ar) - (2 + r) = 4r + 8 + 8ar - 2 - r = 6 + 3r + 8ar$$

die Gleichung $-5 = 6$, also sind Gerade und Ebene in diesem Fall echt parallel.

(8) Gegeben sind die Ebene E und die Gerade g mit

$$E : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \quad \text{und} \quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass g zu E parallel ist, aber nicht in E liegt.

b) Die Gerade h schneidet g orthogonal im Punkt $Q(5|-2|3)$ und verläuft ebenfalls parallel zu E. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h.

(9) a) Weil die x_1-Koordinate des Richtungsvektors $= 0$ ist, ist die Gerade parallel zur x_2x_3-Ebene.

b) Weil die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sein müssen, muss $a = 0$ sein. Punktprobe liefert

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und dies ist für $t = -2$ richtig. Also ist $a = 0$.

b) Ebene durch g_0 und g_1.