MATHEMATIK K1

10.02.2022

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Punkte (max)	2	4	3	3	2	5	4	6	1
Punkte									

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

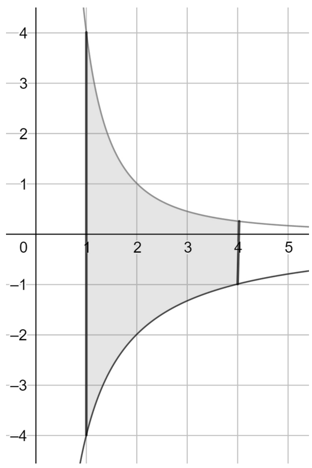
(1) (2 VP) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = x + \frac{x^2}{x^2+3}$$

(2) (4 VP) Die Schaubilder der Funktionen f und g mit

$$f(x) = \frac{4}{x^2} \quad \text{und} \quad g(x) = -\frac{4}{x}$$

begrenzen zusammen mit den Geraden $x = 1$ und $x = 4$ eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt.



(3) (3 VP) Lösen Sie die Gleichung

$$\frac{1}{4}x^5 - \frac{3}{4}x^3 = x.$$

(4) (3 VP) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -9 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & 6 \end{array}$$

(5) (2 VP) Gegeben ist der Punkt $P(\sqrt{2}|\sqrt{3}|2)$. Bestimmen Sie den Abstand von P zum Ursprung und geben Sie einen Punkt Q an, der doppelt so weit vom Ursprung entfernt ist wie P.

(6) (5 VP) Gegeben sind die Punkte $A(2|1|0)$, $B(2|0|-1)$, $C(4|1|1)$ und die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E durch A, B und C.

b) Zeigen Sie, dass E und g echt parallel sind.

c) Geben Sie eine Gleichung einer Geraden h an, die in E liegt und parallel zu g ist.

(7) (4 VP) Gegeben ist die Ebene $x_1 - x_2 + x_3 = 3$ und die Gerade g durch P und Q.

a) Welche Bedingung muss der Punkt $P(a|b|c)$ und welche der Richtungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ erfüllen, damit die Gerade g in der Ebene E liegt?

Sei nun die Gerade $h_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1+a \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben.

b) Bestimmen Sie den Wert von a so, dass h_a senkrecht auf E steht.

c) Bestimmen Sie den Wert von a so, dass h_a in E liegt.

(8) (6 VP) Gegeben sind die Punkte $A(0|1|0)$, $B(5|1|0)$ und $D(0|5|3)$.

a) Zeigen Sie, dass A, B und D Eckpunkte eines Quadrats ABCD sind, und bestimmen Sie die Koordinaten von C.

ABCD ist die Grundfläche einer geraden Pyramide ABCDS, deren Höhe also auf einer Geraden g durch den Mittelpunkt des Quadrats liegt, welche senkrecht auf ABCD steht.

b) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an.

c) Die Spitze S der Pyramide liegt in der x_1x_3-Ebene. Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

(9) Zeige, dass der Punkt $P(5|12)$ auf dem Kreis um den Ursprung mit Radius 13 liegt.

Lösungen

(1) Es ist

$$f'(x) = 1 + \frac{2x(x^2+3) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = 1 + \frac{6x}{(x^2+3)^2}.$$

(2) Fläche zwischen zwei Schaubildern:

$$\begin{aligned} F &= \int_1^4 (f(x) - g(x))\,dx = \int_1^4 \Big(\frac{4}{x^2} + \frac{4}{x}\Big)\,dx \\ &= -\frac{4}{x} + 4\ln(x)\Big|_1^4 = -1 + 4\ln(4) + 4 = 3 + 4\ln(4). \end{aligned}$$

(3) Nenner weg, alles auf eine Seite, Ausklammern, Substitution ...

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x^5 - \frac{3}{4}x^3 - x &= 0 \\ x^5 - 3x^3 - 4x &= 0 \\ x(x^4 - 3x^2 - 4) &= 0 \\ x(x^2-4)(x^2+1) &= 0 \end{aligned}$$

(Vieta). Also ist $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 2$; die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine Lösung.

(4) Gauss oder Kreuzprodukt:

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\-1\\6\end{pmatrix}.$$

Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\10\\-4\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}4\\-5\\2\end{pmatrix}.$$

Jetzt wird die Ausgangsgleichung skalar mit $\begin{pmatrix}4\\-5\\2\end{pmatrix}$ multipliziert; wegen $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\-5\\2\end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\-5\\2\end{pmatrix} = 0$ bleibt $x_3(-8-5-6) = -36+5+12$, also $-19x_3 = -19$ und damit $x_3 = 1$. Einsetzen in das Ausgangssystem liefert

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 2 & = & -9 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 1 & = & -1 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 3 & = & 6 \end{array}$$

Subtrahiert man die zweite vom Doppelten der ersten Gleichung, ergibt sich $4x_2 - 5 = -17$, also $x_2 = -3$. Einsetzen in die erste Gleichung gibt dann $x_2 = 2$.

(5) $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{3}\\2\end{pmatrix}$, also $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2 + 2^2} = \sqrt{2+3+4} = 3.$

Offenbar hat der Punkt $Q(2\sqrt{2}|2\sqrt{3}|4)$ den doppelten Abstand von O.

(6) Parametergleichung:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Kreuzprodukt: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Multipliziert man die Parametergleichung skalar mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, erhält man die Normalenform $\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -4$. Ausmultiplizieren ergibt $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4$ oder

Kontrolle durch Punktprobe mit B: $2 + 0 + 2 = 4$.

Kontrolle durch Punktprobe mit C: $4 + 2 - 2 = 4$.

b) Einsetzen des laufenden Punkts $(2|r|1 + r)$ in die Ebenengleichung ergibt $2 + 2r - 2(1 + r) = 4$, also $0 = 4$. Daher sind Gerade und Ebene echt parallel.

c) Wir verschieben die Gerade parallel in die Ebene, indem wir als Stützpunkt einen Punkt der Ebene wählen, etwa B: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(7) a) Damit der Punkt $P(a|b|c)$ in der Ebene $x_1 - x_2 + x_3 = 3$ liegt, muss $a - b + c = 3$ gelten.

Damit der Richtungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ in der Ebene liegt, muss er senkrecht auf den Normalenvektor stehen: $\overrightarrow{PQ} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

b) Der Richtungsvektor muss Vielfaches von $\vec{n}$ sein:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1+a \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

führt auf $k = 2$ und damit auf $1 + a = 2 \cdot -1$, also $a = -3$.

c) Der Richtungsvektor muss senkrecht auf den Normalenvektor stehen; $0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+a \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 1 - a + 2 = 3 - a$ ergibt $a = 3$.

(8) a) Es ist $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = 5$ und $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$, also ist das Dreieck ABD gleichschenklig und rechtwinklig in A.

Aus $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ folgt $D(5|5|3)$.

b) Mittelpunkt des Quadrats ist der Mittelpunkt von AC, also $M(\frac{5}{2}|3|\frac{3}{2})$.

Normalenvektor der Ebene ABCD ist $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 20 \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Dieser Vektor ist Richtungsvektor der gesuchten Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

c) Schneiden von g mit der x_1x_3-Ebene $x_2 = 0$ ergibt $3 + 3t = 0$, also $t = -1$. Aus

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 5{,}5 \end{pmatrix}$$

folgt $S(2{,}5|0|5{,}5)$.

(9) $5^2 + 12^2 = 13^2$.