MATHEMATIK K1

10.02.2022

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	A.1a)	b)	c)
Punkte (max)	2	2	3	3	4	4	4	7	1
Punkte									

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) = (3 - e^{-\frac{x}{4}})^4$$

(2) Untersuchen Sie, ob das Integral

$$\int_3^{e+2} \frac{1}{x-2}\,dx$$

einen ganzzahligen Wert besitzt.

(3) Lösen Sie für $0 \leq x \leq 2\pi$ die Gleichung

$$(\cos(x))^2 + \cos(x) = 2.$$

(4) Das Schaubild der Funktion

$$f_t(x) = x^2 - \frac{1}{t}x^3$$

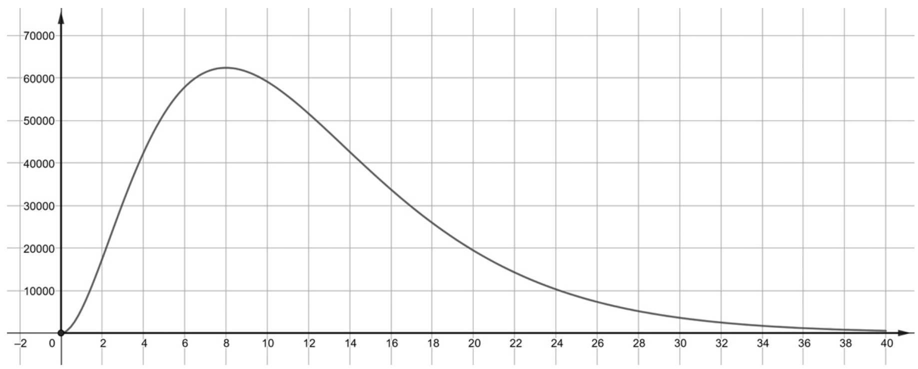
schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Bestimmen Sie t so, dass diese Fläche gleich 18 wird.

(5) Die Schaubilder der Funktionen f und g mit

$$f(x) = \frac{1}{8}x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

schneiden sich in einem Punkt S. Die Tangenten im Punkt S an die beiden Schaubilder bilden zusammen mit der x-Achse bzw. mit der y-Achse je ein Dreieck. Bestimmen Sie den Flächeninhalt beider Dreiecke.

(6) In einer Großstadt breitet sich ein Virus aus. Das folgende Schaubild zeigt die Anzahl der Neuinfizierten pro Woche.



a) Wie viele Neuinfizierte pro Woche gab es nach 20 Wochen?

b) Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem es mehr als 50 000 Neuinfizierte pro Woche gab.

c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an welchem die Zahl der Neuinfizierten pro Woche am stärksten abnimmt.

d) Geben Sie näherungsweise an, wie viele Menschen in den ersten 4 Wochen an dem Virus erkrankt sind.

Analysis A.2

Nach einem Starkregen läuft Wasser aus einem Fluss in ein Rückhaltebecken. Die Zuflussrate ist gegeben durch

$$z(t) = 10\,000 + 12\,000e^{-0\ 2t}$$

Hier bezeichnet t die Zeit in Stunden nach Beobachtungsbeginn und $z(t)$ die Zuflussrate in Kubikmeter pro Stunde (m^3/h).

Aus dem Rückhaltebecken fließt das Wasser mit einer Abflussrate von

$$a(t) = 12\,000$$

(t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, $a(t)$ in m^3/h) wieder ab.

(a) (1 VP) Berechnen Sie die Zufluss- und Abflussrate 2 Stunden nach Beobachtungsbeginn.

(1 VP) Begründen Sie, warum das Wasser im Rückhaltebecken zu diesem Zeitpunkt steigt.

(2 VP) Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, an dem 20.000 Kubikmeter Wasser pro Stunde in das Rückhaltebecken fließen.

(b) (2 VP) Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem am meisten Wasser im Rückhaltebecken ist.

(1 VP) Begründen Sie, dass der Wasserstand im Rückhaltebecken ab diesem Zeitpunkt fällt.

(2 VP) Wieviele Kubikmeter Wasser sind bis zu diesem Zeitpunkt zugeflossen, wieviele abgeflossen?

(2 VP) Geben Sie je einen integralfreien Term für das Volumen des Wassers an, das während der ersten t Stunden zugeflossen bzw. abgeflossen ist.

(c) (1 VP) Geben Sie eine Gleichung an, mit deren Hilfe man berechnen kann, wann doppelt so viele Kubikmeter Wasser zugeflossen wie abgeflossen ist.

Lösungen

(1) Es gilt
$$f'(x) = (3 - e^{-\frac{x}{4}})^3 \cdot e^{-\frac{x}{4}}.$$

(2) Es gilt
$$\int_3^{e+2} \frac{1}{x-2}\, dx = \ln(x-2)\Big|_3^{e-2} = \ln(e) - \ln(1) = 1.$$
Das Integral hat einen ganzzahligen Wert.

(3) Wir finden
$$(\cos(x))^2 + \cos(x) - 2 = (\cos(x) + 2)(\cos(x) - 1) = 0.$$
Der Satz vom Nullprodukt liefert $\cos(x) = 2$ (keine Lösung) bzw. $\cos(x) = 1$ mit den Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2\pi$.

(4) Nullstellen sind $x_1 = 0$ und $x_2 = t$.
$$\int_0^t f_t(x)\, dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4t}x^4\Big|_0^t = \frac{t^3}{12} = 18$$
liefert $t^3 = 12 \cdot 18 = 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 = 6^3$, also $t = 6$.

(5) $f(x) = g(x)$ ergibt $x^3 = 2$, also $S(2|\frac{1}{2})$.

Die beiden Tangentengleichungen sind $y = -\frac{1}{4}x + 1$ bzw. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Schnittpunkte mit der y-Achse: $S_1(0|1)$ und $S_2(0|-\frac{1}{2})$, also $F_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(1|0)$ und $N_2(4|0)$, also $F_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

(6) a) Nach 20 Wochen gab es etwa 18 000 Neuinfizierte pro Woche.

b) Von 4,8 bis bis 12,5 Wochen nach Beobachtungsbeginn.

c) Stärkste Abnahme bei $t \approx 14$.

d) Ein Kästchen entspricht $2 \cdot 10\,000 = 20\,000$ Neuinfizierten pro Woche. 3,5 bis 4 Kästchen entsprechen zwischen 70 000 und 80 000 Neuinfizierte pro Woche.

(a) $z(2) \approx 18\,040$, $a(2) = 12\,000$. Zuflussrate 18.040 m^3/h, Abflussrate 12 000 m^3/h

Weil mehr Wasser zu- als abfließt, steigt das Wasser im Rückhaltebecken zu diesem Zeitpunkt.

$$\begin{aligned} z(t) &= 20\,000 \\ 10\,000 + 12\,000e^{-0\ 2t} &= 20\,000 && \Big|\ -10\,000 \\ 12\,000e^{-0\ 2t} &= 10\,000 && \Big|\ :12\,000 \\ e^{-0{,}2t} &= \tfrac{5}{6} \\ -0{,}2t &= \ln(\tfrac{5}{6}) \\ t &\approx 0{,}91 \end{aligned}$$

Nach etwa 0,9 h.

(b) Am meisten Wasser ist im Rückhaltebecken, wenn $z(t) = a(t)$ ist. Dies liefert $t \approx 8{,}96$.

Ab diesem Zeitpunkt ist $z(t) < a(t)$.

Zufluss: $\int_0^9 z(t)\,dt \approx 1\,400\,000$.

Abfluss: $28000 \cdot 9 = 108000$.

Term für Zufluss:

$$Z(t) = \int_0^t z(t)\,dt = 10000t + 60000 - 60000e^{-0{,}2t}.$$

Term für Abfluss:

$$A(t) = 28000t.$$

(c) Gleichung: $Z(t) = 2A(t)$.