MATHEMATIK K1

12.01.2022

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Punkte (max)	3	6	3	3	3	3	4	4	5	4	5	3
Punkte												

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion der Funktion f:

(a) $f(x) = \dfrac{3}{2x} - \dfrac{3}{2x^2}$

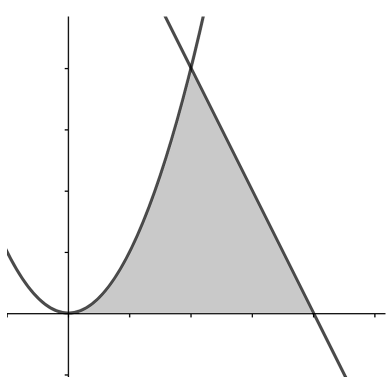
(2) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^6 \sqrt{3x-2}\,dx$$

(3) Lösen Sie die Gleichung

$$(e^{2x+1} - 3)(\ln(x) - 1) = 0.$$

(4) Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 8 - 2x$. Bestimmen Sie den Inhalt der markierten Fläche.



(5) Gegeben ist die Funktion $f(z) = 10(4z-3)^4 + 1$. Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(1) = \sqrt{2}$.

(6) Sei $f(x) = 4(x-2)e^{-0{,}5x}$. Bestimmen Sie Nullstellen und Extrempunkte des Schaubilds von f.

(7) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4x - x^2$. Das Schaubild von f, ihre Tangente in $x = 1$ und die x-Achse schließen eine Fläche ein. Skizzieren Sie diesen Sachverhalt und bestimmen Sie den Inhalt der Fläche.

(1) Lösen Sie die Gleichung

$$(e^{2x+1} - 3)(\ln(x) - 1) = 0.$$

Satz vom Nullprodukt: $e^{2x+1} = 3$ ergibt $x_1 = \frac{\ln(3)-1}{2}$. $\ln(x) - 1 = 0$ ergibt $x_2 = e$.

(2) Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 8 - 2x$. Bestimmen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

Schnittpunkt von f und g ist $S(2|4)$; Nullstelle von g ist $x_1 = 4$.

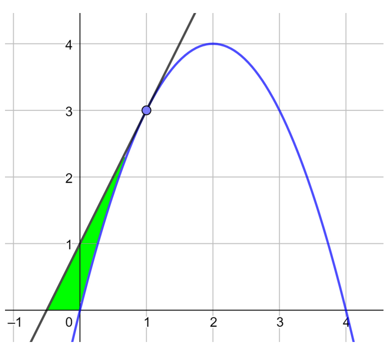
Fläche unter dem Schaubild von f ist

$$A_1 = \int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}.$$

Dreiecksfläche ist $A_2 = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 4$.

Gesamtfläche ist $A = A_1 + A_2 = \frac{16}{3}$.

(3) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4x - x^2$. Das Schaubild von f, ihre Tangente in $x = 1$ und die x-Achse schließen eine Fläche ein. Skizzieren Sie diesen Sachverhalt und bestimmen Sie den Inhalt der Fläche.



Tangente in $x = 1$: $f'(1) = 2$ liefert $y = 2x + 1$ mit Nullstelle $x_1 = -0{,}5$.

Dreiecksfläche $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$.

Fläche zwischen Tangente und Parabel:

$$A_2 = \int_0^1 (2x+1-4x+x^2)\,dx = \int_0^1 (x^2-2x+1)\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Gesamtfläche $A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.

(4) Sei $f(x) = 4(x-2)e^{-0,5x}$. Bestimmen Sie Nullstellen und Extrempunkte des Schaubilds von f.

Nullstellen: $e^{-0,5x} \neq 0$, also $x_1 = 2$.

$$f'(x) = 4e^{-0,5x} - 2(x-2)e^{-0,5x} = 2(4-x)e^{-0,5x}$$
$$f''(x) = -2e^{-0,5x} - (4-x)e^{-0,5x} = (x-6)e^{-0,5x}$$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$ liefert $x_1 = 4$; $f(4) = 8e^{-2}$; $f''(4) = -2e^{-2} - 0$, also $H(4|\frac{8}{e^2})$.