MATHEMATIK K1

12.01.2022

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Punkte (max)	4	4	6	3	2	4	4	2	1
Punkte									

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktionen f mit

(a) $f(x) = (e^{2x} - x)^4$

(b) $f(x) = \ln((\sin(x))^2 + 1)$

(2) Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion der Funktion f:

(a) $f(x) = e^{-2x} - 2x$

(b) $f(x) = \pi \sin(2\pi x + 1)$

(3) Berechnen Sie die beiden Integrale

$$\int_0^{e-1} \left(\frac{3}{x+1} - 1\right) dx \quad \text{und} \quad \int_1^6 \sqrt{3x-2}\, dx$$

(4) Lösen Sie die Gleichung

$$xe^{2x} + xe^x = 6x.$$

(5) Begründen Sie, dass es keine positive reelle Zahl k gibt mit

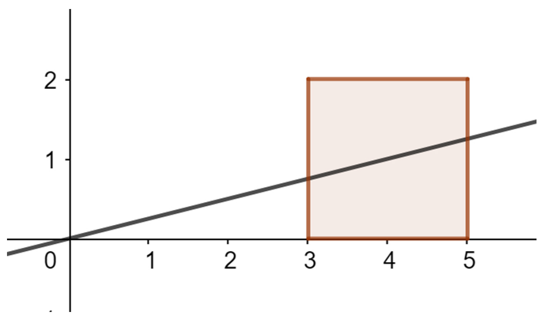
$$\int_0^k \frac{1}{x^2+1}\, dx < 0.$$

(6) Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = x^2 - 3x$ und $g(x) = x$. Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, welche von den Schaubildern von f und g eingeschlossen wird.

(7) Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax - x^2$ $(a > 0)$.

Bestimmen Sie a so, dass die Fläche, welche das Schaubild und die x-Achse einschließen, gleich 36 ist.

(8) Eine Gerade durch den Ursprung teilt das Quadrat mit den Eckpunkten $(3|0)$, $(5|0)$, $(5|2)$ und $(3|2)$ in zwei gleich große Flächen. Bestimmen Sie die Steigung der Geraden.



(9) Bei einem Pferderennen nehmen nur schwarze oder braune Pferde teil. Dabei gibt es 50 % mehr schwarze als braune Pferde. Wie viel Prozent der Pferde sind braun?

Lösungen

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktionen f mit

(a) $f'(x) = 4(e^{2x} - x)^3(2e^{2x} - 1)$

(b) $f'(x) = \dfrac{2\sin(x)\cos(x)}{(\sin(x))^2 + 1}$.

(2) Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion der Funktion f:

(a) $F(x) = -0{,}5e^{-2x} - x^2$

(b) $F(x) = 0{,}5\cos(2\pi x + 1)$

(3) Berechnen Sie die beiden Integrale:

$$\begin{aligned}\int_0^{e-1} \left(\frac{3}{x+1} - 1\right) dx &= 3\ln(x+1) - x\Big|_0^{e-1} \\ &= 3\ln(e) - (e-1) - 3\ln(1) = 4 - e,\end{aligned}$$

$$\int_1^6 \sqrt{3x-2}\,dx = \frac{2}{9}\sqrt{3x-2}^3\Big|_1^6 = \frac{2}{9}(64-1) = 14.$$

(4) Lösen Sie die Gleichung

$$xe^{2x} + xe^x = 6x.$$

Satz vom Nullprodukt: $x_1 = 0$ oder $e^{2x} + e^x - 6 = 0$. Vieta ergibt $(e^x - 2)(e^x + 3) = 0$, also $x_2 = \ln(2)$, weil $e^x = -3$ keine Lösung hat.

(5) Begründen Sie, dass es keine positive reelle Zahl k gibt mit

$$\int_0^k \frac{1}{x^2+1}\,dx < 0.$$

Die Funktion ist überall positiv, also kann das Integral für $k > 0$ nicht negativ sein.

(6) Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = x^2 - 3x$ und $g(x) = x$. Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, welche von den Schaubildern von f und g eingeschlossen wird.

Schnittpunkte: $f(x) = g(x)$ liefert $S_1(0|0)$ und $S_2(4|4)$.

$$A = \int_0^4 [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{32}{3}.$$

(7) Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax - x^2$ $(a > 0)$.

Bestimmen Sie a so, dass die Fläche, welche das Schaubild und die x-Achse einschließen, gleich 36 ist.

Nullstellen von f sind $x_1 = 0$ und $x_2 = a$.

$$36 = \int_0^a (ax - x^2)\,dx = \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}$$

liefert $a^3 = 6 \cdot 36$, also $a = 6$.

(8) Eine Gerade durch den Ursprung teilt das Quadrat mit den Eckpunkten $(3|0)$, $(5|0)$, $(5|2)$ und $(3|2)$ in zwei gleich große Flächen. Bestimmen Sie die Steigung der Geraden.

Mit Analysis: Das Quadrat hat Flächeninhalt 4.

$$2 = \int_3^5 mx\,dx = \frac{mx^2}{2}\Big|_3^5 = 8m$$

liefert $m = \frac{1}{4}$.

Ohne Analysis: Damit der Inhalt der unteren Fläche genau so groß ist wie die der oberen, muss die Gerade $y = mx$ in $x = 3$ den Wert a, in $x = 5$ den Wert $2 - a$ haben. Dies liefert

$$3m = a, \quad 5m = 2 - a$$

und somit $5m = 2 - 3m$, also $8m = 2$ und $m = \frac{1}{4}$.

Ganz einfach: wenn eine Gerade ein Quadrat halbiert, geht sie durch dessen Mittelpunkt, hier also durch $(4|1)$. Also ist $m = \frac{1}{4}$.

(9) Wenn es insgesamt 100 Pferde sind und davon x braun sind, müssen $1{,}5x$ schwarz sein. Aus $x + 1{,}5x = 2{,}5x = 100$ folgt dann $x = 40$. Es sind also 40 % braune und 60 % schwarze Pferde.