MATHEMATIK K1

NOV. 2021

Aufgabe	1	2	3	4	5
Punkte (max)	10	3	7	6	4
Punkte					

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen und vereinfachen Sie die Terme so weit wie möglich.

a) $f(x) = (x + 2\sqrt{x}\,)^4$

b) $g(x) = (x + 1)e^{-x}$

c) $k(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2 + 1}$

d) $p(x) = \cos(2x)e^{2-x}$

e) $r(x) = (x^2 + e^x)^4$

(2) Lösen Sie die Gleichung

$$e^{2x} + 4 = 5e^{-2x}.$$

(3) Gegeben ist die Funktion

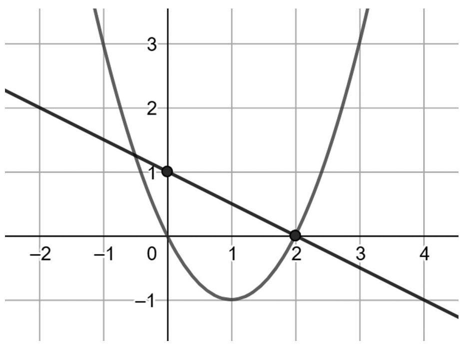
$$f(x) = \frac{4}{3} + \frac{2}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}.$$

(a) Bestimmen Sie den Extrempunkt von f und weisen Sie nach, dass es sich um einen Tiefpunkt handelt.

(b) Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle zwischen $x = 4$ und $x = 9$ besitzt.

(c) Bestimmen Sie die Nullstellen von f exakt.

(4) Gegeben sind die Schaubilder zweier Funktionen f und n; dabei ist n die Normale an das Schaubild von f an der Stelle $x = 2$.



Weiter ist $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ und $k(x) = f(g(x))$.

(a) Bestimmen Sie die Steigung der Geraden n, sowie die Steigung der Tangente an das Schaubild von f in $x = 2$.

(b) Bestimmen Sie $h'(2)$ und $k'(0)$.

(c) Bestimmen Sie die Nullstellen von $k(x)$.

(5) Gegeben sind die Punkte $A(2|1|-2)$, $B(-1|7|4)$ und $C(0|5|2)$.

(a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g durch A und B an und zeigen Sie, dass der Punkt C auf g liegt. Entscheiden Sie, ob C zwischen A und B liegt (Begründung!).

(b) Berechnen Sie die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$, und bestimmen Sie zwei Punkte auf g, die von B Abstand 9 haben.

Lösungen

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen:

a)
$$f(x) = (x + 2\sqrt{x}\,)^4$$
$$f'(x) = 4(x + 2\sqrt{x}\,)^3(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\,)$$

b)
$$g(x) = (x+1)e^{-x}$$
$$g'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$$

c)
$$k(x) = \frac{\sin(x)}{x^2+1}$$
$$k'(x) = \frac{(x^2+1)\cos(x) - 2x\sin(x)}{(x^2+1)^2}$$

d)
$$p(x) = \cos(2x)e^{2-x}$$
$$p'(x) = -2\sin(2x)e^{2-x} - \cos(2x)e^{2-x}$$

e)
$$r(x) = (x^2 + e^x)^4$$
$$r'(x) = 4(x^2 + e^x)^3(2x + e^x)$$

(2) Lösen Sie die Gleichung:

$$\begin{aligned} e^{2x} + 4 &= 5e^{-2x} \\ e^{2x} + 4 &= \frac{5}{e^{2x}} && \Big| \cdot e^{2x} \\ e^{4x} + 4e^{2x} &= 5 && \Big| -5 \\ e^{4x} + 4e^{2x} - 5 &= 0 \\ (e^{2x}+5)(e^{2x}-1) &= 0 \end{aligned}$$

Satz vom Nullprodukt: $e^{2x} = -5$ hat keine Lösung, $e^{2x} = 1$ ergibt $x = 0$.

(3) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{4}{3} + \frac{2}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}.$$

(a) Bestimmen Sie den Extrempunkt von f und weisen Sie nach, dass es sich um einen Tiefpunkt handelt.

(b) Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle zwischen $x = 4$ und $x = 9$ besitzt.

(c) Bestimmen Sie die Nullstellen von f exakt.

(a) Es ist

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}^3},$$
$$f''(x) = \frac{4}{x^3} - \frac{3}{\sqrt{x}^5}.$$

Aus $f'(x) = 0$ folgt nach Multiplikation mit x^2 und der Beobachtung $\frac{x^2}{\sqrt{x}^3} = \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{x}$ die Gleichung

$$-2 + 2\sqrt{x} = 0,$$

was auf $\sqrt{x} = 1$ und damit $x = 1$ führt. Wegen $f''(1) = 4 - 3 = 1 > 0$ liegt ein Tiefpunkt vor, und es ist $f(1) = \frac{4}{3} + 2 - 4 = -\frac{2}{3}$. Also ist $T(1| - \frac{2}{3})$.

(b) Wir finden

$$f(4) = \frac{4}{3} + \frac{2}{4} - \frac{4}{\sqrt{4}} = -1/6,$$
$$f(9) = \frac{4}{3} + \frac{2}{9} - \frac{4}{3} = \frac{2}{9}.$$

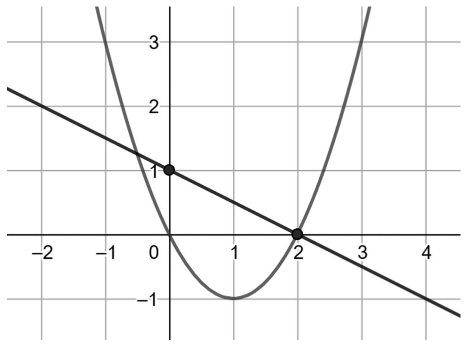
Weil f zwischen $x = 4$ und $x = 9$ das Vorzeichen wechselt, muss es dazwischen eine Nullstelle geben.

(c) Aus $f(x) = 0$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} + \frac{2}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} &= 0 && \Big|\ \cdot 3x \\ 4x + 6 - 12\sqrt{x} &= 0 && \Big|\ : 2 \\ 2x - 6\sqrt{x} + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Substitution $\frac{1}{\sqrt{x}} = z$ ergibt $2z^2 - 6z + 3 = 0$, also $z_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{4}$ und damit $z_1 \approx 0{,}634$, $z_2 \approx 2{,}366$. Wegen $z = \sqrt{x}$ folgt nach Quadrieren $x_{1,2} = \left(\frac{6 \pm \sqrt{12}}{4}\right)^2$.

(4) Gegeben sind die Schaubilder zweier Funktionen f und n; dabei ist n die Normale an das Schaubild von f an der Stelle $x = 2$.



Weiter ist $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ und $k(x) = f(g(x))$.

(a) Bestimmen Sie die Steigung der Geraden n, sowie die Steigung der Tangente an das Schaubild von f in $x = 2$.

(b) Bestimmen Sie $h'(2)$ und $k'(0)$.

(c) Bestimmen Sie die Nullstellen von $k(x)$.

(5) Gegeben sind die Punkte $A(2|1|-2)$, $B(-1|7|4)$ und $C(0|5|2)$.

(a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g durch A und B an und zeigen Sie, dass der Punkt C auf g liegt. Entscheiden Sie, ob C zwischen A und B liegt (Begründung!).

(b) Berechnen Sie die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$, und bestimmen Sie zwei Punkte auf g, die von B Abstand 9 haben.

(6) (a) Es ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, also $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

Punktprobe: $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ liefert $t = \frac{2}{3}$; also liegt C auf g.

Wegen $0 < t < 1$ liegt C zwischen A und B; alternativ: die Koordinaten von C liegen jeweisl zwischen denen von A und B.

(b) Es ist $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = 9$. Die beiden Punkte mit Abstand 9 von B entsprechen den Parametern $t_1 = 0$ und $t_2 = 2$, das sind A bzw. D mit

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix},$$

also $D(-4|13|10)$.

Lösungen

(1)

(2)

(3)

(4)

(5) (a) Es ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, also $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

Punktprobe: $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ liefert $t = \frac{2}{3}$; also liegt C auf g.

Wegen $0 < t < 1$ liegt C zwischen A und B; alternativ: die Koordinaten von C liegen jeweisl zwischen denen von A und B.

(b) Es ist $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = 9$. Die beiden Punkte mit Abstand 9 von B entsprechen den Parametern $t_1 = 0$ und $t_2 = 2$, das sind A bzw. D mit

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix},$$

also $D(-4|13|10)$.