ÜBUNGEN VEKTOREN

F. LEMMERMEYER

(1) Bestimmen Sie b so, dass das Dreieck ABC mit $A(1|1|1)$, $B(2|3|3)$ und $C(5|3-b|3-2b)$ rechtwinklig in B ist. Ergänzen Sie dieses Dreieck zu einem Rechteck.

(2) Zeigen Sie, dass die Punkte $A(1|1|1)$, $B(4|0|0)$ und $C(-1|1|2)$ in der Ebene $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ liegen. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $D(-7|-5|2)$ von E.

Geben Sie weiter den Schnittpunkt der Geraden BD mit der Ebene E an.

(3) Gegeben sind die Ebene E und die Gerade g durch

$$E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \quad \text{und} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Ermitteln Sie den Schnittpunkt von g und E.

b) Bestimmen Sie diejenigen Punkte auf g, die von E den Abstand 3 haben.

(4) Zeigen Sie, dass die Punkte $A(1|1|1)$, $B(4|0|0)$ und $C(-1|1|2)$ in der Ebene $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ liegen. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $D(-7|-5|2)$ von E.

Geben Sie weiter den Schnittpunkt der Geraden BD mit der Ebene E an.

(5) Die Punkte $A(-1|0|6)$, $B(3|-4|4)$ und $C(1|4|2)$ liegen in einer Ebene E. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene.

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig ist.

(6) Bestimmen Sie alle Punkte auf der Geraden

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

welche von $P(1|2|1)$ den Abstand 9 haben.

(7) Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(0|1|2)$ und $B(2|5|6)$.

a) Zeigen Sie, dass die Punkte A und B Abstand 6 haben.

b) Die Punkte C und D liegen auf g und haben von A jeweils Abstand 12. Bestimmen Sie die Koordinaten von C und D.

(8) Gegeben ist die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie eine Gleichung der x_1x_2-Ebene an und begründen Sie, warum die Gerade g zu dieser Ebene parallel ist.

b) Die Ebene E enthält g und ist parallel zur x_3-Achse. Geben Sie eine Koordinatengleichung von E an und skizzieren Sie E in einem geeigneten Koordinatensystem.

(9) In einem Koordinatensystem sind die Ebene $E : x_1 + x_3 = 0$, der Punkt $A(0|\sqrt{2}|2)$, und die Gerade $g : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

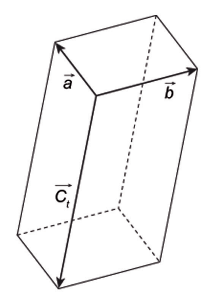
a) Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat E?

b) Bestimmen Sie die gegenseitige Lage von g und E.

(10) Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}_t = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix}$ spannen für jeden Wert $t \neq 0$ einen Körper auf (sh. Abbildung).

a) Zeigen Sie, dass die aufgespannten Körper Quader sind.

b) Bestimmen Sie diejenigen Werte von t, für die der entsprechende Quader Volumen 15 besitzt.



(11) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & -4x_2 & +x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}$$

(12) Gegeben ist die Ebene $E: -2x_1+6x_2+3x_3 = 11$ und der Punkt $P(4|-5|0)$.

a) Bestimmen Sie den Lotfußpunkt L von P und den Abstand $d = |\overrightarrow{PL}|$.

Kontrollieren Sie das Ergebnis mit Hilfe der Hesseschen Normalform.

b) Geben Sie die Gleichung einer Geraden an, die Abstand 7 von der Ebene hat und nicht auf derselben Seite der Ebene liegt wie P.

(13) Gegeben sind die Ebene $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass E und g parallel sind und berechnen Sie den Abstand von E und g.

b) Geben Sie eine Gleichung einer Geraden h an, die den Abstand 10 von E hat.

(14) Gegeben sind die beiden Ebenen $E: 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 11$ und $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von F.

b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von E und F.

c) Geben Sie die Gleichung einer Geraden an, die von E genauso weit entfernt ist wie von F.

(15) Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(9|4|3)$, $B(2|0|-1)$ und $C(2|0|8)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist, und bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D, der das Dreieck zur Raute ergänzt.

b) Untersuchen Sie, ob das Dreieck die x_1x_2-Ebene schneidet.

(16) Gegeben sind der Punkt $P(-2|3|0)$ und die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie den Abstand von P zu g.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts Q, der vom Ursprung doppelt so weit entfernt ist wie P.

(17) Gegeben sind die Punkte

$$A(-4|2|-1), \quad B(-4{,}5|-3|1) \quad \text{und} \quad M(-2{,}5|-1|2).$$

M ist jeweils der Mittelpunkt der Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten von C und D.

b) Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD eine Raute ist und berechnen Sie deren Flächeninhalt.

(18) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} ax_1 & + & bx_2 & = & -3 \\ ax_1 & - & 2bx_2 & = & 9 \end{array}$$

hat die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$. Bestimmen Sie a und b.

(19) Gegeben sind die Ebene $E : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass E und g parallel sind und berechnen Sie den Abstand von E und g.

b) Geben Sie eine Gleichung einer Geraden h an, die den Abstand 10 von E hat.

(20) Gegeben ist das Dreieck ABD mit $A(1|2|-1)$, $B(2|4|1)$ und $D(5|4|-5)$.

a) Zeigen Sie, dass man dieses Dreieck zu einem Rechteck ABCD ergänzen kann, und bestimmen Sie die Koordinaten von C.

b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, die das Rechteck ABCD enthält.

c) Bestimme diejenigen Punkte S auf der Lotgeraden zu E durch A, für welche die Pyramide ABCDS das Volumen $V = 36$ besitzt.

(21) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgerade der beiden Ebenen

$$E: x_1 - 3x_2 - x_3 = -2 \quad \text{und} \quad F: 3x_1 - x_2 + x_3 = 6.$$

(22) Gegeben ist die Ebene $E: 3x_2 + 4x_3 = 12$.

a) Stellen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.

b) Die Ebene F entsteht durch Spiegelung von E an der x_1x_2-Ebene. Geben Sie eine Gleichung der Ebene F an.

(23) Gegeben sind die Punkte $P(5|4|3)$, $Q(1|3|-4)$ und $R(6|0|3)$, sowie die Gerade $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$. Die Punkte P und Q liegen auf der Geraden h.

a) Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h und ermitteln Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunkts.

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck PQR einen rechten Winkel in P besitzt.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, der das Dreieck PQR zu einem Rechteck ergänzt.

(24) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \end{array}$$

(25) Bestimmen Sie eine Gleichung in Koordinatenform der Ebene E durch die Punkte $A(0|0|2)$, $B(6|1|-1)$ und $C(4|1|0)$ (mögliches Zwischenergebnis: $x_1 + 2x_3 = 4$).

Zeichnen Sie die Ebene E in ein geeignetes Koordinatensystem.

Die Koordinatenebenen, die Ebene E und die Ebene mit der Gleichung $x_2 = 5$ legen einen Körper fest. Bestimmen Sie sein Volumen.

(26) Der Punkt $P(-1|-8|4)$ wird an der Ebene $E: 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -8$ gespiegelt; bestimmen Sie die Koordinaten des Bildpunkts.

Geben Sie die Gleichung einer Ebene F an, die parallel zu E ist und den doppelten Abstand zu P hat wie E.

(27) Gegeben ist die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der Punkt $P(2|5|-2)$.

a) Bestimmen Sie den Abstand d von P und g.

b) Geben Sie einen Punkt an, der den dreifachen Abstand von g hat wie P.

c) Geben Sie die Gleichung einer Geraden an, die den doppelten Abstand zu P hat wie g.

Lösungen

(1) Bestimmen Sie b so, dass das Dreieck ABC mit $A(1|1|1)$, $B(2|3|3)$ und $C(5|3-b|3-2b)$ rechtwinklig in B ist. Ergänzen Sie dieses Dreieck zu einem Rechteck.

(2) Zeigen Sie, dass die Punkte $A(1|1|1)$, $B(4|0|0)$ und $C(-1|1|2)$ in der Ebene $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ liegen. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $D(-7|-5|2)$ von E.

Geben Sie weiter den Schnittpunkt der Geraden BD mit der Ebene E an.

(3) Gegeben sind die Ebene E und die Gerade g durch

$$E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \quad \text{und} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Ermitteln Sie den Schnittpunkt von g und E.

b) Bestimmen Sie diejenigen Punkte auf g, die von E den Abstand 3 haben.

(4) Zeigen Sie, dass die Punkte $A(1|1|1)$, $B(4|0|0)$ und $C(-1|1|2)$ in der Ebene $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ liegen. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $D(-7|-5|2)$ von E.

Geben Sie weiter den Schnittpunkt der Geraden BD mit der Ebene E an.

(5) Die Punkte $A(-1|0|6)$, $B(3|-4|4)$ und $C(1|4|2)$ liegen in einer Ebene E. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene.

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig ist.

(6) Bestimmen Sie alle Punkte auf der Geraden

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

welche von $P(1|2|1)$ den Abstand 9 haben.

(7) Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(0|1|2)$ und $B(2|5|6)$.

a) Zeigen Sie, dass die Punkte A und B Abstand 6 haben.

b) Die Punkte C und D liegen auf g und haben von A jeweils Abstand 12. Bestimmen Sie die Koordinaten von C und D.

(8) Gegeben ist die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie eine Gleichung der x_1x_2-Ebene an und begründen Sie, warum die Gerade g zu dieser Ebene parallel ist.

b) Die Ebene E enthält g und ist parallel zur x_3-Achse. Geben Sie eine Koordinatengleichung von E an und skizzieren Sie E in einem geeigneten Koordinatensystem.

(9) In einem Koordinatensystem sind die Ebene $E : x_1 + x_3 = 0$, der Punkt $A(0|\sqrt{2}|2)$, und die Gerade $g : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

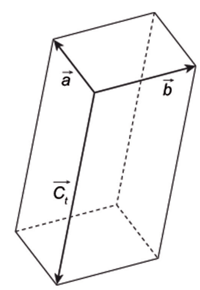
a) Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat E?

b) Bestimmen Sie die gegenseitige Lage von g und E.

(10) Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}_t = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix}$ spannen für jeden Wert $t \neq 0$ einen Körper auf (sh. Abbildung).

a) Zeigen Sie, dass die aufgespannten Körper Quader sind.

b) Bestimmen Sie diejenigen Werte von t, für die der entsprechende Quader Volumen 15 besitzt.



(11) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & -4x_2 & +x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}$$

(12) a) Lotgerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$; Schneiden mit E liefert

$$-2(4 - 2t) + 6(-5 + 6t) + 3(3t) = 11,$$

also $t = 1$. Lotfußpunkt $L(2|1|3)$.

Abstand $d = |\overrightarrow{PL}| = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7$.

HNF: $\frac{-2x_1+6x_2+3x_3-11}{7} = 0$, $d = \frac{|-8-30-11|}{7} = 7$.

b) P hat Abstand 7 von E. Um einen Punkt auf der andern Seite von E mit Abstand 7 zu finden, spiegelt man P am Lotfußpunkt:

$$P(4|-5|9)$$
$$L(2|1|3)$$
$$P'(0|7|-3)$$

Damit die Gerade parallel zu E ist, muss ihr Richtungsvektor senkrecht auf $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ stehen, also etwa $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Damit ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(13) Gegeben sind die Ebene $E : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass E und g parallel sind und berechnen Sie den Abstand von E und g.

b) Geben Sie eine Gleichung einer Geraden h an, die den Abstand 10 von E hat.

(14) Es ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$; mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$F : 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = -7.$$

Die Ebenen sind echt parallel (gleicher Normalenvektor, verschiedene Spurpunkte).

c) Die Gerade muss senkrecht auf $\vec{n}$ stehen und durch einen Punkt gehen, der von E und F gleichen Abstand hat.

Weil $P(0|-1|1)$ auf E und $Q(5|0|-2)$ auf F liegt, ist $M(\frac{5}{2}|-\frac{1}{2}|-\frac{1}{2})$ ein solcher Punkt. Wegen $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$ ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Gerade, die von E genauso weit entfernt ist wie von F.

(15) Es ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$. Wegen $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CB}| = 9$ ist das Dreieck gleichschenklig. Ergänzen zur Raute ABCD mittels $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ liefert $D(9|4|12)$.

b) Das Dreieck ABC schneidet die x_1x_2-Ebene, weil B unterhalb und A und C oberhalb der x_1x_2-Ebene liegen.

(16) Gegeben sind der Punkt $P(-2|3|0)$ und die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie den Abstand von P zu g.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts Q, der vom Ursprung doppelt so weit entfernt ist wie P.

(17) Es ist $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, also $C(-1|-4|5)$, sowie $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und damit $D(-0{,}5|1|3)$.

ABCD ist eine Parallelogramm wegen $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$.

ABCD ist eine Raute wegen $\overline{AB} = \sqrt{29{,}25}$ und $\overline{AD} = \sqrt{3{,}5^2 + 1 + 4^2} = \sqrt{29{,}25}$.

Flächeninhalt: $\overline{AM} = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5$, $\overline{BM} = 3$, also $F = 2 \cdot 4{,}5 \cdot 3 = 27$.

(18) Einsetzen von $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$ ergibt

$$\begin{aligned} a - 2b &= -3, \\ a + 4b &= \ 9. \end{aligned}$$

Dies liefert $a = 1$ und $b = 2$.

(19) a) $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$, also sind E und g parallel.

Ebenengleichung $E : 4x_1 - 3x_2 = -11$ (Punkt $(-2|1|0)$ einsetzen), HNF ist $\frac{4x_1 - 3x_2 + 11}{5} = 0$. Der Abstand ist der Abstand von $P(-1|6|2)$ von E, also $d = \left|\frac{-4-18+11}{5}\right| = \frac{11}{5}$.

b) Gerade kann man parallel zu g wählen; Punkt mit Abstand 10 zu E muss $|4x_1 - 3x_2 + 11| = 50$ erfüllen, etwa $(0|-13|0)$.

(20) Gegeben sind der Punkt $P(-2|3|0)$ und die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie den Abstand von P zu g.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts Q, der vom Ursprung doppelt so weit entfernt ist wie P.

(21) Gegeben ist das Dreieck ABD mit $A(1|2|-1)$, $B(2|4|1)$ und $D(5|4|-5)$.

a) Zeigen Sie, dass man dieses Dreieck zu einem Rechteck ABCD ergänzen kann, und bestimmen Sie die Koordinaten von C.

b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, die das Rechteck ABCD enthält.

c) Bestimme diejenigen Punkte S auf der Lotgeraden zu E durch A, für welche die Pyramide ABCDS das Volumen $V = 36$ besitzt.

(22) Addition der beiden Gleichungen liefert

$$4x_1 - 4x_2 = 4, \quad \text{also} \quad x_1 - x_2 = 1.$$

$x_2 = t$ liefert $x_1 = 1 + t$; Einsetzen in F dann $x_3 = 6 - 3(1 + t) + t = 3 - 2t$. Aus

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & = & 1 & + & t \\ x_2 & = & & & t \\ x_3 & = & 3 & - & 2t \end{array}$$

folgt dann $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-2.$

Kontrolle: Punktprobe mit $P(1|0|3)$ zeigt: P liegt in E und F.

Richtungsvektor muss senkrecht auf beide Normalenvektoren stehen, da er in beiden Ebenen liegt: auch das stimmt.

(23) Die Spurpunkte sind $S_2(0|4|0)$ und $S_3(0|0|3)$. Die Ebene ist parallel zur x_1-Achse.

Die an der x_1x_2-Ebene gespiegelte Ebene ist parallel zur x_1-Achse und hat die Spurpunkte $S_2(0|4|0)$ und $S_3'(0|0|-3)$. Die Gleichung ist $F : 3x_2 - 4x_3 = 12$.

(24) $h : \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-4\\-1\\-7\end{pmatrix}$: Schneiden mit g liefert $s = t = \frac{1}{2}$ und den Schnittpunkt $S(3|3{,}5|-0{,}5)$.

b) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}-4\\-1\\-7\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}$. Wegen $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$ hat das Dreieck in P einen rechten Winkel.

c) $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$ liefert ...

(25) In Vektorform:

$$x_1\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Kreuzprodukt: $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\\-1\end{pmatrix}$; skalare Multiplikation mit diesem Vektor liefert $x_2(-10-2+4) = 0-1-3$, also $x_2 = \frac{1}{2}$. Einsetzen liefert das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 1 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 1 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 2 & + & 3x_3 & = & 3 \end{array}$$

Daraus folgt dann schnell $x_1 = -2$ und $x_3 = 3$.

(26) Ebenengleichung

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}6\\1\\-3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Kreuzprodukt $\vec{n} = \begin{pmatrix}6\\1\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.

Ebenengleichung $E: x_1 + 2x_3 = 4$.

Spurpunkte $S_1(4|0|0)$, $S_3(0|0|2)$.

Volumen eines Prismas; entweder halber Quader $V = \frac{1}{2}Gh = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 2 = 20$ oder $V = Gh$, wobei G die linke Dreiecksfläche ist, also $V = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot 5 = 20$.

(27) Lotgerade (Richtungsvektor $= \vec{n}$): $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\-8\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$.

Schneiden mit E:

$$\begin{aligned} -8 &= 2(-1+2t) - 4(-8-4t) + 4 + t \\ &= -2 + 4t + 32 + 16t + 4 + t = 34 + 21t \end{aligned}$$

liefert $t = -2$, also $L(-5|0|2)$.

P an L spiegeln ergibt $P'(-9|8|0)$.