MATHEMATIK K1

KLAUSUR 07.07.2021

Aufgabe	G a)	b)	c)	d)	e)	S a)	b)
Punkte (max)	2	3	2	3	2	6	2
Punkte							

Gesamtpunktzahl	/20
Notenpunkte	

Stochastik

In einer Gemeinde gibt es 6250 Haushalte, von denen 2250 über einen schnellen Internetanschluss verfügen. Ein Telekommunikationsunternehmen schreibt zufällig 10 Haushalte an.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit

(A) verfügen mindestens zwei der angeschriebenen Haushalte über keinen schnellen Internetanschluss?

(B) verfügen genau acht bereits über einen schnellen Internetanschluss?

(C) verfügt genau einer der ersten fünf und mindestens einer der letzten fünf angeschriebenen Haushalte über einen schnellen Internetanschluss?

b) Bestimmen Sie, wie viele Haushalte das Unternehmen mindestens anschreiben müsste, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens vier angeschriebene Haushalte über keinen schnellen Internetanschluss verfügen.

Geometrie

Ein Körper (Abb. 1) wird begrenzt von der quadratischen Grundfläche ABCD mit $A(5|5|0)$, $B(-5|5|0)$, $C(-5|-5|0)$ und $D(5|-5|0)$, acht dreieckigen Seitenflächen und einem weiteren Quadrat EFGH mit $E(2|0|4)$, $F(0|2|4)$, $G(-2|0|4)$ und $H(0|-2|4)$.

Der Mittelpunkt S des Quadrats ABCD ist der Ursprung des Koordinatensystems, und der gesamte Körper ist symmetrisch bezüglich der x_1x_3-Ebene und der x_2x_3-Ebene.

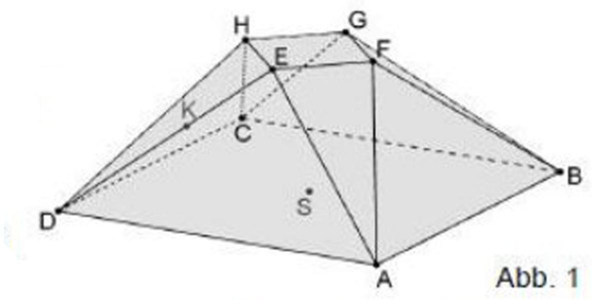

Abb. 1

(a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABF bei F rechtwinklig ist.

(b) Das Dreieck ABF liegt in der Ebene W. Ermitteln Sie eine Gleichung von W in Koordinatenform und beschreiben Sie die besondere Lage von W im Koordinatensystem.

(c) Berechnen Sie den Winkel, den die Seitenfläche ABF mit der Grundfläche ABCD einschließt.

(d) Auf der Strecke DE gibt es einen Punkt K, für den $\overline{KE} = \overline{EF}$ gilt. Bestimmen Sie die Koordinaten von K.

(e) Es gibt genau eine Kugel, auf der alle acht Eckpunkte des Körpers liegen. Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunkts dieser Kugel.

Lösungen

Geometrie.

(a) Wir haben
$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix}-5\\-3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\4\end{pmatrix} = -25+9+16=0.$$

(b) Parametergleichung
$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-5\\-3\\4\end{pmatrix}.$$

Kreuzprodukt $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$, also $4x_2+3x_3=d$; Einsetzen von A ergibt
$$W: 4x_2+3x_3=20.$$

Die Ebene W ist parallel zur x_1-Achse.

(c) $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha\approx 53{,}1°$.

(d) Es ist $\overline{EF} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ und $\overline{ED} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Also ist $\overline{ED}$ 2,5-mal so lang wie $\overline{EF}$; der gesuchte Punkt ist also
$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OE} + \frac{2}{5}\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} + 0{,}4\cdot\begin{pmatrix}3\\-5\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3{,}2\\-2\\3{,}4\end{pmatrix}.$$

Also ist $K(3{,}2|-2|3{,}4)$.

Alternativ: laufender Punkt auf ED ist $K(2+3t|-5t|4-4t)$, also $\overrightarrow{EK} = \begin{pmatrix}3t\\-5t\\-4t\end{pmatrix}$; aus $\overline{EK} = \sqrt{9t^2+25t^2+16t^2} = \sqrt{50t^2} = \sqrt{8}$ folgt $50t^2=8$, also $t=\pm 25$. Damit K zwischen D und E liegt, muss $t=\frac{2}{5}$ sein, und wir finden wieder $K(3{,}2|-2|3{,}4)$.

(e) Aus Symmetriegründen muss der Mittelpunkt M auf der Geraden durch S senkrecht auf ABCD liegen; also ist $M(0|0|a)$.

Dieser Punkt M muss von D und E gleich weit enfernt sein. Wegen $\overrightarrow{MD} = \begin{pmatrix}-5\\5\\a\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{ME} = \begin{pmatrix}-2\\0\\4-a\end{pmatrix}$ folgt daraus
$$5^2+5^2+a^2 = 2^2+(4-a)^2.$$

Auflösen der Klammern ergibt $a = -\frac{30}{8} = -\frac{15}{4}$. Also ist $M(0|0|-3{,}75)$.

Stochastik. a) Die Zufallsvariable X bezeichnet die Anzahl der angeschriebenen Haushalte ohne schnellen Internetanschluss. X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = \frac{6250-2250}{6250} = \frac{16}{25}$.

- $p(A) = p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1) \approx 0{,}9993$.
- $p(B) = p(X = 2) \approx 0{,}0052$.
- Y sei die Anzahl der angeschriebenen Haushalte ohne schnellen Internetanschluss; dann ist Y binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = \frac{16}{25}$, und es gilt

  $p(C) = p(Y = 1) \cdot p(Y \geq 1) = p(Y = 1) \cdot (1 - p(Y = 0)) \approx 0{,}0537 \cdot (1 - 0{,}006) \approx 0{,}053$.

b) Es muss $p(X \geq 4) \geq 0{,}99$ sein, also $p(X \leq 3) \leq 0{,}01$. Für $n = 11$ ist $p(X \leq 3) \approx 0{,}0147$, für $n = 12$ dagegen $p(X \leq 3) \approx 0{,}00695$. Man muss also mindestens 12 Haushalte anschreiben.