K1 LERNSTANDSERHEBUNG

12. 05. 2021

Aufgabe	1	2	4
Punkte (max)	2	12	1
Punkte			

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktion:

$$f(x) = \left(2x^2 - \frac{1}{x^2}\right)(\sqrt{x} + x)$$

(2) Gegeben sind die Ebenen E und F durch die Gleichungen

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad F: \ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 9.$$

(a) (2 VP) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E und zeigen Sie, dass die beiden Ebenen parallel sind.

(b) (2 VP) Berechnen Sie den Abstand der beiden Ebenen

(c) (3 VP) Berechnen Sie die Lotfußpunkte von $O(0|0|0)$ auf E und F.

(1 VP) Begründen Sie, dass O zwischen den beiden Ebene liegt.

(d) (2 VP) Gegeben ist weiter die Gerade $g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die gegenseitige Lage von g und E.

(e) (2 VP) Bestimmen Sie den Punkt auf der Geraden g, der von $P(5|2|-1)$ den kleinsten Abstand hat. Wie groß ist dieser Abstand?

(3) Seien a und b zwei Zahlen mit $ab = a - b$. Finden Sie den Wert von

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab.$$

Lösungen

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktion:

$$f(x) = \Big(2x^2 - \frac{1}{x^2}\Big)(\sqrt{x} + x)$$

$$f'(x) = \Big(4x + 2x^3\Big)(\sqrt{x} + x) + \Big(2x^2 - \frac{1}{x^2}\Big)\Big(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\Big)$$

(2) Gegeben sind die Ebenen E und F durch die Gleichungen

$$E: \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad F: \ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 9.$$

(a) Kreuzprodukt der Spannvektoren:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\6\\3\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix},$$

also $E: 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2\cdot 1 - 2\cdot 2 - 1\cdot 4 = -6. WeilbeideEbenendenselbenNormalenvektorh$

(b) Es geht um den Abstand von $Q(1|2|4)$ zur Ebene F;

HNF: $\frac{2x_1-2x_2-x_3-9}{3} = 0$, damit

$$d = \frac{|2-4-4-9|}{3} = 5.$$

(c) Lotgerade durch O ist $\vec{x} = r\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$. Schnittpunkt mit E: $2(2r) - 2(-2r) - (-r) = -6$ ergibt $9r = -6$, also $r = -\frac{2}{3}$ und damit $L_E(-\frac{4}{3}|\frac{4}{3}|\frac{2}{3})$.

Schnittpunkt mit F: $9r = 9$ ergibt $r = 1$, also $L_F(2|-2|-1)$.

Weil der Ursprung zu $r = 0$, die Schnittpunkte zu $r = -\frac{2}{3}$ bzw. $r = 1$ gehören, liegt O zwischen den beiden Ebenen.

(d) (3 VP) Bestimmen Sie die Schnittgerade von E und der x_1x_2-Ebene.

Hinweis: Eine Möglichkeit ist die folgende: Setzen Sie die x_3-Koordinate der Parametergleichung von E gleich 0 und lösen Sie nach r auf; setzt man dies in die Parametergleichung von E ein und vereinfacht, dann erhält man die Gleichung der Schnittgeraden.

(e) (2 VP) Gegeben ist weiter die Gerade $g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die gegenseitige Lage von g und E.

Schneiden liefert $2(1+r) - 2(2+r) - (-1) = 9$, also $-1 = 9$: die Gerade ist echt parallel zu E.

(f) Zu bestimmen ist der Lotfußpunkt. Lotebene ist $x_1 + x_2 = 7$; Schneiden ergibt $1 + r + 2 + r = 7$, also $r = 2$ und damit $L(3|4|-1)$. Der Abstand ist $d = \sqrt{8}$.

(2 VP) Bestimmen Sie den Punkt auf der Geraden g, der von $P(5|2|-1)$ den kleinsten Abstand hat. Wie groß ist dieser Abstand?

(3) Es ist

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab &= \frac{a^2 + b^2}{ab} - ab = \frac{a^2 + b^2 - (ab)^2}{ab} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - (a-b)^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{ab} = \frac{2ab}{ab} = 2. \end{aligned}$$