# K1 LERNSTANDSERHEBUNG

05. 05. 2021

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Punkte (max) | 2 | 9 | 3 | 1 |
| Punkte | | | | |

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktion:

$$f(x) = (x^2 + 2x) \cdot e^{-2x+1}$$

(2) Gegeben sind die Punkte $A(0|3|6)$, $B(1|2|-6)$, $C(-9|-2|2)$, $P(5|4|0)$ und $Q(2|-6|7)$, sowie die Gerade $g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) (2 VP) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene $E$, welche die Punkte $A$, $B$ und $C$ enthält. [mögl. Ergebnis: $4x_1 - 8x_2 + x_3 + 18 = 0$]

(b) (1 VP) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts $S$ von $g$ und $E$.

(c) (2 VP) Weisen Sie nach, dass $P$ auf $g$ liegt, und berechnen Sie die Länge der Strecke $SP$.

(d) (1 VP) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P$ von der Ebene $E$.

(e) (1 VP) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch $P$, welche auf $g$ senkrecht steht und parallel zu $E$ ist.

(f) (2 VP) Der Punkt $Q$ wird an $E$ gespiegelt. Bestimmen Sie die Koordinaten des gespiegelten Punkts $Q'$.

(3) Bestimmen Sie den Abstand des Punkts $P(1|8|1)$ von der Geraden

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Welcher der folgenden Brüche liegt am nächsten bei $\frac{2}{3}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\frac{3}{4}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{7}{9}, \quad \frac{1}{2}.$$

## Lösungen

(1) Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+2x)\cdot e^{-2x+1} \\ f'(x) &= (2x+1)\cdot e^{-2x+1} - 2(x^2+2x)\cdot e^{-2x+1} \end{aligned}$$

(2) (a) Parametergleichung

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0\\3\\6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1\\-1\\-12 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -9\\-5\\-4 \end{pmatrix}.$$

Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} -1\\1\\12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9\\5\\4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -56\\112\\-14 \end{pmatrix} = -14\cdot\begin{pmatrix} 4\\-8\\1 \end{pmatrix}.$$

Koordinatengleichung $E: 4x_1 - 8x_2 + x_3 = d$; Einsetzen von $A$ ergibt $d = -18$.

Schneiden mit $g$ ergibt $-4t - 32 + 5 + t = -18$, also $t = -3$ und damit $S(3|4|2)$.

d) Punktprobe mit $P$ gibt $t = -5$; $|\overrightarrow{SP}| = \sqrt{8}$.

HNF von $E$ ist $\frac{4x_1-8x_2+x_3+18}{9} = 0$. Also ist $d(P,E) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

e) Parallel zu $E$ bedeutet, dass der Richtungsvektor $\vec{u}$ von $h$ senkrecht auf $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4\\-8\\1 \end{pmatrix}$ steht. Also ist $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1\\0\\1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4\\-8\\1 \end{pmatrix} =$

f) Lotgerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2\\-6\\7 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 4\\-8\\1 \end{pmatrix}$. Schneiden mit $E$ liefert

$$4(2+4t) - 8(-6-8t) + 7 + t + 18 = 0$$

ergibt $t = -1$, also $L(-2|2|6)$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} &Q(2|-6|7) \\ &L(-2|2|6) \\ &Q'(-6|10|5) \end{aligned}$$

(3) Lotebene $E: -2x_1 + x_2 = -2 + 8 = 6$; Schneiden ergibt $-2(6-2r) + 8 + r = -4 + 5r = 6$, also $r = 2$ und $L(2|10|3)$.

$d(P,g) = |\overrightarrow{PL}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$.

(4) Es ist $\frac{2}{3} = \frac{24}{36}$, $\frac{3}{4} = \frac{27}{36}$, $\frac{5}{6} = \frac{30}{36}$, $\frac{7}{9} = \frac{28}{36}$ und $\frac{1}{2} = \frac{18}{36}$. Also liegt $\frac{3}{4}$ am nächsten bei $\frac{2}{3}$.