MATHEMATIK K1

KLAUSUR 2 09.11.2020

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Punkte (max)	6	5	2	5	3	4	4	1
Punkte								

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen.

a) $f(x) = (x^2 - x) \cdot e^{-2x}$

b) $g(x) = x \cdot \ln(x^2 + 1)$

c) $k(x) = \dfrac{2x}{3} - \dfrac{3}{2x}$

d) $p(x) = a^2 \cdot e^{a^2 x}$

(2) Bestimmen Sie je eine Stammfunktion der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = 20(1 - 5x)^4 + x$

b) $g(x) = \dfrac{3}{4x} - \dfrac{3}{4x^2}$

c) $k(x) = 3e^{-2x}$

(3) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von

$$f(x) = 2\pi \cos(\tfrac{\pi}{2}x)$$

mit $F(1) = 4$.

(4) Lösen Sie die Gleichungen

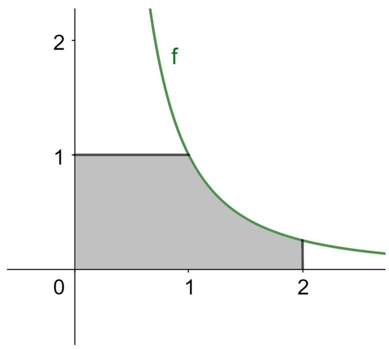
$$a) \qquad e^{2x} - 5 = 6e^{-2x}$$

$$b) \qquad e^x \cdot (2e^{-x-1} - 2) = 0$$

(5) Berechnen Sie das Integral

$$\int_3^{12} (\sqrt{3x} + 1)\, dx$$

(6) Die folgende Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Bestimmen Sie den Inhalt der markierten Fläche.



(7) Bestimmen Sie Nullstellen und Extrempunkte der Funktion

$$f(x) = (2x - 1) \cdot e^{-2x}$$

(8) Welches ist die größte der folgenden Zahlen?

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2021}, \; \frac{1}{2} + \frac{1}{2020}, \; \frac{1}{3} + \frac{1}{2029}, \; \ldots, \; \frac{1}{1011} + \frac{1}{1011}.$$

Lösungen

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen.

$$
\begin{array}{ll}
a) & f(x) = (x^2 - x) \cdot e^{-2x} \\
b) & g(x) = x \cdot \ln(x^2 + 1) \\
c) & k(x) = \frac{2x}{3} - \frac{3}{2x} \\
d) & p(x) = a^2 \cdot e^{a^2 x}
\end{array}
$$

(2) Bestimmen Sie je eine Stammfunktion der folgenden Funktionen.

$$
\begin{array}{ll}
a) & f(x) = 20(1 - 5x)^4 + x \\
b) & g(x) = \frac{3}{4x} - \frac{3}{4x^2} \\
c) & k(x) = 3e^{-2x} \\
d) & p(x) = 12a \cdot \sqrt{3x}
\end{array}
$$

(3) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von

$$f(x) = 2\pi \cos(\tfrac{\pi}{2}x)$$

mit $F(1) = 4$.

(4) Lösen Sie die Gleichungen

$$
\begin{array}{ll}
a) & e^{2x} - 5 = 6e^{-2x} \\
b) & e^x \cdot (2e^{-x-1} - 2) = 0
\end{array}
$$

(5) Wir finden

$$\int_3^{12} (\sqrt{3x} + 1)\, dx = \frac{2}{9}\sqrt{3x}^3 \Big|_3^{12} = \frac{2}{9} \cdot 6^3 - \frac{2}{9} \cdot 27 = 48 - 6 = 42.$$

(6) Der Flächeninhalt ist gegeben durch

$$A = 1 + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = 1 + \Big[-\frac{1}{x} \Big]_1^2 = 1 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

(7) Wir finden

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-1)e^{-2x} \\ f'(x) &= 2e^{-2x} - 2(2x-1)e^{-2x} = (4-4x)e^{-2x} \\ f''(x) &= -4e^{-2x} - 2(4-4x)e^{-2x} = (8x-12)e^{-2x} \end{aligned}$$

Nullstellen: $f(x) = 0$ liefert mit dem Satz vom Nullprodukt $2x - 1 = 0$ bzw. $e^{-2x} = 0$. Die erste Gleichung hat die Lösung $x_1 = \frac{1}{2}$, die zweite hat keine Lösung.

Extrempunkte: $f'(x) = 0$ liefert mit dem Satz vom Nullprodukt $x_1 = 1$ als einzige Lösung. Wegen $f''(1) = -4^{-2x} < 0$ liegt ein Hochpunkt vor: $H(1|\frac{1}{e^2})$.