MATHEMATIK K1

20.10.2020

Aufgabe	1	2	3	4	5
Punkte (max)	9	3	10	7	1
Punkte					

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

a) $f(x) = \sqrt{2x} \cdot \cos(2x) + 3x$

b) $g(x) = 2x \cdot (1 - 4x)^2$

c) $k(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{2x} + 1$

d) $p(x) = a^2 \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$

Berechnen Sie weiter $k'(1)$.

(2) Lösen Sie die Gleichung

$$x^5 + x^3 = 6x.$$

(3) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{2} - \sqrt{2x}$$

- (a) Bestimmen Sie die Nullstellen und den Extrempunkt des Schaubilds von f und weisen Sie nach, dass kein Wendepunkt existiert.
- (b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente und der Normale in $x = 8$.
- (c) An welcher Stelle hat die Tangente die Steigung $m = -1$?
- (*) Zeigen Sie, dass die Steigung des Schaubilds von f immer $\leq \frac{1}{2}$ ist.

(4) Gegeben sind die Punkte $A(2|0|-1)$, $B(3|2|2)$ und $C(4|2|c)$.

- (a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g durch A und B.
- (b) Zeigen Sie, dass der Punkt C für keinen Wert von c auf der Geraden g liegt.
- (c) Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, die durch A geht und parallel zur x_1-Achse ist.
- (d) Bestimmen Sie c so, dass das Dreieck ABC rechtwinklig in A ist.

(5) Bestimmen Sie die erste Ableitung von $f(x) = (abc \cdots xyz)^2$.

Lösungen

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

a) $$f(x) = \sqrt{2x} \cdot \cos(2x) + 3x$$

$$f'(x) = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{2x}} - 2\sqrt{2x}\sin(2x) + 3$$

b) $$g(x) = 2x \cdot (1-4x)^2$$

$$g'(x) = 2(1-4x)^2 - 16x(1-4x)$$

c) $$k(x) = \frac{x^2+x+1}{2x} + 1 = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x} + 1$$

$$k'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}$$

c) $$k(x) = \frac{x^2+x+1}{2x} + 1$$

d) $$p(x) = a^2 \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$p(x) = \frac{a^2 x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$k'(1) = 0$.

(2) Lösen Sie die Gleichung

$$x^5 + x^3 = 6x.$$

$x^5 + x^3 = 6x$	$-6x$
$x^5 + x^3 - 6x = 0$	Ausklammern
$x(x^4 + x^2 - 6) = 0$	Vieta
$x(x^2+3)(x^2-2) = 0$	Nullprodukt

Dies ergibt $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$; die Gleichung $x^2 + 3 = 0$ hat keine Lösung.

(3) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{2} - \sqrt{2x}$$

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen und den Extrempunkt des Schaubilds von f und weisen Sie nach, dass kein Wendepunkt existiert.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2} - \sqrt{2x} = \frac{x}{2} - (2x)^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= \frac{1}{2} - (2x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2x}} \\ f''(x) &= \frac{1}{\sqrt{2x}^3} \end{aligned}$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} - \sqrt{2x} &= 0 \\ \frac{x}{2} &= \sqrt{2x} \\ \frac{x^2}{4} &= 2x \\ x^2 - 8x &= 0 \end{aligned}$$

Also sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 8$ die Nullstellen von f.

(b) $f(8) = 0$, $m = f'(8) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Tangente: $y = \frac{1}{4}x - 2$.

Normale: $m' = -4$; also $y = -4x + 32$.

(c) $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2x}} = -1$ liefert $\frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{3}{2}$, also $2x = \frac{4}{9}$ und damit $x = \frac{2}{9}$.

(*) Man muss $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2x}} \leq \frac{1}{2}$ zeigen. Das ist aber klar, weil $\frac{1}{\sqrt{2x}}$ positiv ist.

(4) Gegeben sind die Punkte $A(2|0|-1)$, $B(3|2|2)$ und $C(4|2|c)$.

(a) $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) Es muss $4 = 2 + t$ und $2 = 2t$ gelten, was auf $t = 2$ bzw. $t = 1$ führt. Also liegt C nicht auf g.

(c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) Es ist $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{14}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{8 + (c+1)^2}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1 + (c-2)^2}$. Pythagoras ergibt

$$1 + (c-2)^2 = 14 + 8 + (c+1)^2,$$

also nach Auflösen der Klammern

$$c^2 - 4c + 5 = c^2 + 2c + 23$$

Daraus folgt $c = -3$.

(5) Es ist $f'(x) = 2(abc \cdots xyz) \cdot (abc \cdots wyz)$.