MATHEMATIK K1

14.10.2020

Aufgabe	1	2	3	4	5
Punkte (max)	9	3	6	11	1
Punkte					

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

$a)$ $f(x) = 2x^2 \cdot \sin(\pi x) + x^2$

$b)$ $g(x) = \sqrt{2x} \cdot (1-x)^3$

$c)$ $k(x) = \dfrac{x^2+1}{2x} + 1$

$d)$ $p(x) = a^2 \cdot (x^2 - a^2)^3$

Berechnen Sie weiter $k'(1)$.

(2) Lösen Sie die Gleichung

$$(x^2-4)(x^3-27) = 0$$

(3) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 1 - 2\sqrt{x} + \frac{x}{2}.$$

(a) Bestimmen Sie den Extrempunkt des Schaubilds von f und weisen Sie nach, dass kein Wendepunkt existiert.

(b) An welcher Stelle hat die Tangente die Steigung $m = -\frac{1}{2}$?

(c) Zeigen Sie, dass f je eine Nullstelle zwischen $x = 0$ und $x = 1$ bzw. zwischen $x = 9$ und $x = 16$ besitzt.

(*) Bestimmen Sie die Nullstellen von f exakt.

(4) Gegeben sind die Punkte $A(0|-4|-2)$, $B(2|-2|-1)$ und $C(1|-3|-6)$.

(a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g durch A und B an.

(b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden durch C, welche zu g parallel ist.

(c) Welcher Punkt auf g ist von B doppelt so weit entfernt wie A?

(d) Zeigen Sie, dass g die x_1-Achse schneidet.

(e) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von g mit der x_2x_3-Ebene.

(f) Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC rechtwinklig bzw. gleichschenklig ist.

(5) Welche Fläche (in m^2) hat ein Rechteck mit den Seitenlängen 2 km und 0,5 mm?

Lösungen

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

a)
$$f(x) = 2x^2 \cdot \sin(\pi x) + x^2$$
$$f'(x) = 4x\sin(\pi x) + 2\pi x^2 \cos(\pi x) + 2x$$

b)
$$g(x) = \sqrt{2x} \cdot (1-x)^3$$
$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (1-x)^3 - 3\sqrt{2x} \cdot (1-x)^2$$

c)
$$k(x) = \frac{x^2+1}{2x} + 1$$
$$k'(x) = \frac{4x^2 - 2(x^2+1)}{4x^2} = \frac{x^2-1}{2x^2}$$

d)
$$p(x) = a^2 \cdot (x^2 - a^2)^3$$
$$p'(x) = -6a^2x(x^2-a^2)^2$$

$k'(1) = 0$.

(2) Lösen Sie die Gleichung

$$(x^2-4)(x^3-27) = 0$$

Satz vom Nullprodukt: $x_{1,2} = \pm 2$, $x_3 = 3$.

(3) Wir bestimmen f' und f'':

$$f(x) = 1 - 2\sqrt{x} + \frac{x}{2}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}$$
$$f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}^3}$$

(a) Extrempunkte: $f'(x) = 0$.

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} = 0 \qquad \Big| -\frac{1}{2}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2} \qquad \Big| \cdot(-2\sqrt{x})$$
$$2 = \sqrt{x} \qquad \Big| \,\hat{}\,2$$
$$4 = x$$

Wegen $f(4) = -1$ und $f''(4) = \frac{1}{16} > 0$ liegt ein Tiefpunkt vor: $T(4|-1)$.

Wendepunkte: $f''(x) = 0$. Die Gleichung führt auf $0 = 1$; also gibt es keinen Wendepunkt.

(b) Hier ist $f'(x) = m = -\frac{1}{2}$ zu lösen:

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \qquad \Big| -\frac{1}{2}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{x}} = -1 \Big| \cdot(-2\sqrt{x}\,)$$
$$1 = \sqrt{x} \qquad \Big| \frown 2$$
$$1 = x$$

Die Tangente in $x = 1$ hat Steigung $-\frac{1}{2}$.

(c) Wegen $f(0) = 1$ und $f(1) = -0{,}5$ hat f im Intervall $[0; 1]$ einen Vorzeichenwechsel und daher eine Nullstelle.

Entsprechend ist $f(9) = -0{,}5$ und $f(16) = 1$.

(*) Plan: Isolieren der Wurzel und Quadrieren.

$$1 - 2\sqrt{x} + \frac{x}{2} = 0 \qquad \Big| +2\sqrt{x}$$
$$1 + \frac{x}{2} = 2\sqrt{x} \qquad \Big| \cdot 2$$
$$2 + x = 4\sqrt{x} \qquad \Big| \frown 2$$
$$4 + 4x + x^2 = 16x \qquad \Big| -16x$$
$$x^2 - 12x + 4 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{128}}{2} = 6 \pm 4\sqrt{2}$$

Also ist $x_1 \approx 0{,}34$ und $x_2 \approx 11{,}66$.

(4) Gegeben sind die Punkte $A(0|-4|-2)$, $B(2|-2|-1)$ und $C(1|-3|-6))$.

(a) $g: \; \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\vec{x} = \overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Der Punkt A ist Mittelpunkt von BP; daraus folgt $P(-2|-6|-3)$.

(d) Punktprobe mit $S(a|0|0)$ liefert die drei Gleichungen

$$a = 2t, \quad 0 = -4 + 2t, \quad 0 = -2 + t.$$

Also ist $t = 2$ und damit $a = 4$, also $S(4|0|0)$.

Alternativ: Die x_1-Achse hat die Gleichung $\vec{x} = r\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Schneiden liefert dieselben drei Gleichungen wie oben.

(e) Punkte der x_2x_3-Ebene genügen der Gleichung $x_1 = 0$. Nullsetzen der x_1-Koordinate von g liefert $t = 0$, also $Q(0|-4|-2)$.

(f) Wir finden

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) & |\overrightarrow{AB}| &= 3 \\ \overrightarrow{AC} &= \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{smallmatrix}\right) & |\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{18} \\ \overrightarrow{BC} &= \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{smallmatrix}\right) & |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{27} \end{aligned}$$

Wegen

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = 3^2 + 18 = 27 = |\overrightarrow{BC}|^2$$

ist das Dreieck ABC rechtwinklig in A. Weiles keine zwei gleich langen Seiten gibt, ist das Dreieck nicht gleichschenklig.

(5) $A = 2000 \text{ m} \cdot 0{,}0005 \text{ m} = 1 \text{ m}^2$.