MATHEMATIK K1

05.03.2020

Aufgabe	1	2	3	4	5a)	b)	c)	d)	e)	f)
Punkte (max)	4	3	3	1	4	1	3	3	4	4
Punkte										

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen.

a) $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^{-x}$

b) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

(2) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^6 \left(\frac{2}{\sqrt{3x-2}} + 1\right) dx$$

(3) Lösen Sie die Gleichung

$$\cos(2x) + 1 = \frac{2}{\cos(2x)}$$

für $0 \leq x \leq \pi$.

(4) Welches ist die größte dreistellige Zahl, die durch 7 und 9 teilbar ist?

(5) Mit einem Pflaster können einer Person durch die Haut Medikamente zugeführt werden, z. B. Hormone. Diese Pflaster geben über einen langen Zeitraum hinweg Hormone ab.

Eine Arzneimittelfirma hat solche Pflaster an Personen getestet, deren körpereigene Hormonproduktion lediglich 50 % des Sollwertes beträgt. Der Sollwert liegt bei 100 %.

Bei der Messung der Hormonwerte zeigt sich, dass die Messergebnisse durch folgende Funktion h beschrieben werden können:

$$h(t) = 8t \cdot e^{-0{,}04t} + 50$$

Dabei ist t die Zeit in Tagen ab Beginn der Behandlung.

Die Funktionswerte von h werden als Hormonspiegel bezeichnet.

Der Hormonspiegel gibt in Abhängigkeit von t den Anteil bezüglich des Sollwerts in Prozent an. Funktionswerte größer als 100 sind möglich, wenn der Hormonwert über dem Sollwert liegt.

(a) (4 VP) Ermitteln Sie rechnerisch, wann der maximale Wert des Hormonspiegels erreicht wird, und berechnen Sie diesen Wert.

(b) (1 VP) Welcher Hormonspiegel wird langfristig erreicht?

(c) (3 VP) Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem der Hormonspiegel am stärksten fällt. Berechnen Sie für diesen Zeitpunkt den Wert des Hormonspiegels.

Zur Kontrolle: $h''(t) = (-0{,}64 + 0{,}0128t) \cdot e^{-0{,}04t}$.

(d) (3 VP) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate des Hormonspiegels in den ersten sieben Tagen nach Beginn der Behandlung.

(e) (4 VP) Zeigen Sie, dass

$$H(t) = -(200t + 5000)e^{-0{,}04t} + 50t$$

eine Stammfunktion von h ist, und weisen Sie nach, dass

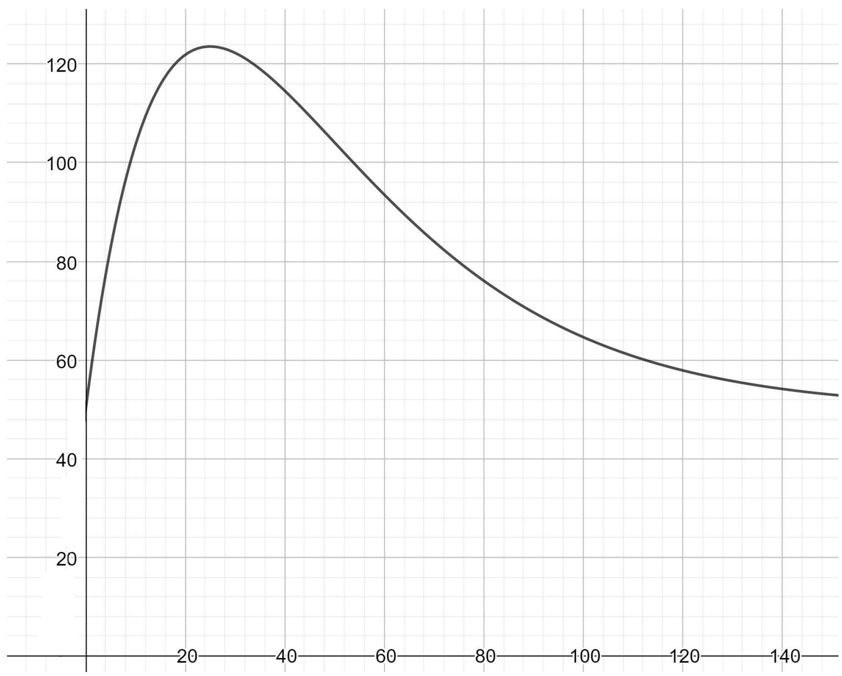
$$\frac{1}{70} \int_0^{70} h(t)\, dt > 100.$$

Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Sachzusammenhang.

(f) (4 VP) Bei einem Patienten wird das Pflaster nach 70 Tagen entfernt. Der Hormonspiegel kann danach durch eine Gerade g beschrieben werden, die im Punkt $P(70|h(70))$ tangential zum Graphen von h verläuft.

Ermitteln Sie eine Gleichung für g.

Ermitteln Sie rechnerisch, ab welchem Zeitpunkt $g(t) \leq 50$ gilt.



Lösungen

(1) Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-2)e^{-x} - (x^2-2x)e^{-x} = e^{-x}(2x-2-(x^2-2x)) \\ &= e^{-x}(2x-2-x^2+2x) = (-x^2+4x-2)e^{-x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x(x^2+1)^{-1} - x^2(x^2+1)^{-1}\cdot(2x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x^3}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x(x^2+1)}{(x^2+1)^2} - \frac{2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Dass g' relativ einfach ist, liegt daran, dass

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

ist.

(2) Die Ableitung der Klammer ist **keine Zahl**, also ist jeder Ansatz mit $(\frac{2}{\sqrt{3x-2}}+1)^2$ zum Scheitern verurteilt. Hier müssen die Terme einzeln aufgeleitet werden. Damit wird

$$\begin{aligned} \int_1^6 \Big(\frac{2}{\sqrt{3x-2}}+1\Big)\,dx &= \tfrac{4}{3}\sqrt{3x-2}+x\Big|_1^6 = \tfrac{4}{3}\cdot 4 + 6 - (\tfrac{4}{3}+1) \\ &= \tfrac{16}{3} + 6 - \tfrac{4}{3} - 1 = \tfrac{12}{3} + 5 = 9. \end{aligned}$$

(3) Nenner weg, Alles auf eine Seite, Ausklammern oder Substitution:

$$\begin{aligned} \cos(2x)+1 &= \frac{2}{\cos(2x)} && \Big|\ \cdot\cos(2x) \\ (\cos(2x))^2+\cos(2x) &= 2 && \Big|\ -2 \\ (\cos(2x))^2+\cos(2x)-2 &= 0 && \Big|\ \cos(2x)=z \\ z^2+z-2 &= 0 && \Big|\ \text{Vieta} \\ (z+2)(z-1) &= 0 && \Big|\ \text{Nullprodukt} \end{aligned}$$

Also ist $z_1 = -2$ und $z_2 = 1$.

Die Gleichung $\cos(2x) = -2$ hat keine Lösung; zum Lösen von $\cos(2x) = 1$ setzen wir $u = 2x$; die Lösungen von $\cos(u) = 1$ im Intervall $[0; 2\pi]$ sind $u_1 = 0$ und $u_2 = 2\pi$. Aus $2x = 0$ und $2x = 2\pi$ folgt dann $x_1 = 0$ und $x_2 = \pi$.

(4) Wir suchen dreistellige Zahlen, die durch 63 teilbar sind. Wegen $1000 : 63 \approx 15{,}8$ ist die größte solche $15 \cdot 63 = 945$.

(5) (a) Maximum von f, also $f'(t) = 0$.

$$f'(t) = 8e^{-0{,}04t} - 0{,}32te^{-0{,}04t} = (8 - 0{,}32t)e^{-0{,}04t}.$$

Wegen $e^{-0{,}04t} \neq 0$ muss $t = 25$ sein. Außerdem ist $f(25) = 123{,}6$.

Der maximale Hormonspiegel wird 25 Tage nach Beobachtungsbeginn erreicht, und er beträgt etwa 124%.

(b) Langfristig wird wegen $8te^{-0{,}04t} \longrightarrow 0$ ein Hormonspiegel von 50 % erreicht.

(c) Minimum von f', also $f''(t) = 0$.

$$f''(t) = -0{,}32e^{-0{,}04t} - 0{,}04(8 - 0{,}32t)e^{-0{,}04t} = (-0{,}64 + 0{,}0128t)e^{-0{,}04t}.$$

Wegen $e^{-0{,}04t} \neq 0$ ist daher $t = 50$. Weiter ist $f(50) \approx 104$.

Der Hormonspiegel sinkt 50 Tage nach Anbringung des Pflasters am stärksten; der Hormonspiegel beträgt zu diesem Zeitpunkt etwa 104 %.

(d) Gesucht ist die mittlere Änderungsrate des Hormonspiegels. Die mittlere Änderungsrate entspricht immer der Steigung einer Geraden durch zwei Punkte. Benutzt man die bekannte Formel für Mittelwerte einer Funktion, so ist hier

$$\frac{1}{7-0}\int_0^7 h'(t)\,dt = \frac{h(7) - h(0)}{7 - 0}$$

zu bestimmen (Differenz der Funktionswerte durch Differenz der t-Koordinaten). Also ist die gesuchte Änderungsrate

$$\frac{h(7) - h(0)}{7 - 0} \approx \frac{92{,}3 - 50}{7} \approx 6{,}04.$$

Die mittlere Änderungsrate beträgt also etwa 6 % pro Tag.

(e) Wir müssen zeigen, dass $H'(t) = h(t)$ ist.

$$H'(t) = -200e^{-0{,}04t} + 0{,}04(200t + 5000)e^{-0{,}04} + 50 = 8te^{-0{,}04t} + 50 = h(t).$$

Damit wird

$$\frac{1}{70}\int_0^{70} h(t)\,dt = \frac{H(70) - H(0)}{70 - 0} \approx \frac{2344{,}6 + 5000}{70} \approx 104{,}9.$$

Hier geht es um den Mittelwert von h während der ersten 70 Tage. Im Schnitt liegt der Hormonspiegel also etwa bei 105 % und damit oberhalb von 100 %.

(f) Wegen $h(70) \approx 84{,}05$ und $h'(70) \approx -0{,}8757$ ist $g(t) = -0{,}8757(t-70) + 84{,}05 = -0{,}8757t + 145{,}35$; Nullsetzen ergibt $t \approx 164$.

Aus $g(t) = 50$ ergibt sich $t \approx 106{,}6$. Also liegt der Hormonspiegel ab dem 107. Tag unter 50 %.