# MATHEMATIK K1

14.02.2020

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Punkte (max) | 4 | 2 | 3 | 7 | 14 |
| Punkte | | | | | |

| Gesamtpunktzahl | /30 |
|---|---|
| Notenpunkte | |

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen.

$a)$ $$f(x) = (x^2 + x) \cdot \sin(x)$$

$b)$ $$g(b) = (b+1)e^{2b}$$

(2) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^e \left( \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx$$

(3) Lösen Sie die Gleichung

$$\cos(\pi x) \cdot e^x = \cos(\pi x)$$

für $0 \leq x \leq 2$.

(4) Das Schaubild der Funktion $f$ in Anlage A stellt eine Borkenkäferpopulation in einem kleinen Waldtück dar (Zeit $t$ in Monaten nach Beobachtungsbeginn, $f(t)$ in 1000 Käfern).

(a) (2 VP) Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem es mehr als 6000 Käfer gibt.

(b) (2 VP) Bestimmen Sie die Änderungsrate von $f$ 4 Monate nach Beobachtungsbeginn.

(c) (1 VP) Interpretieren Sie den Wert des Integrals

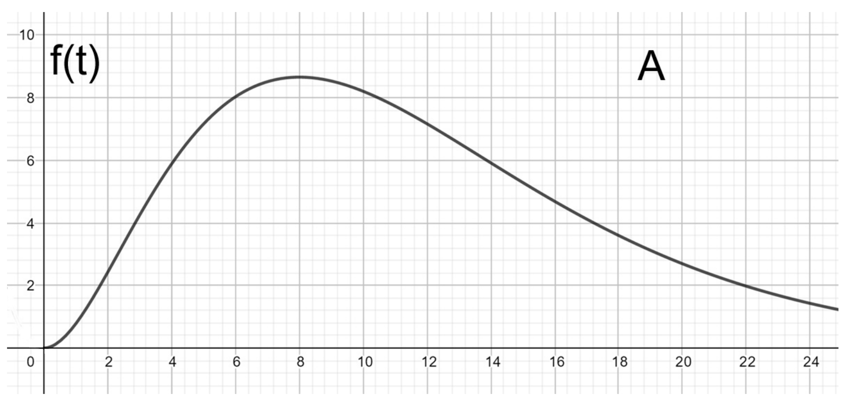
$$\frac{1}{12}\int_0^{12} f(t)\,dt$$

im Sachzusammenhang.

(d) (2 VP) Interpretieren Sie die Gleichung

$$f(t+10) = f(t)$$

im Sachzusammenhang, und geben Sie eine Lösung an.



(5) Durch die Funktion $f$ mit

$$f(t) = 20t \cdot e^{-0,5t}$$

($t$ in Stunden seit der Einnahme, $f(t)$ in mg/$\ell$) wird die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben.

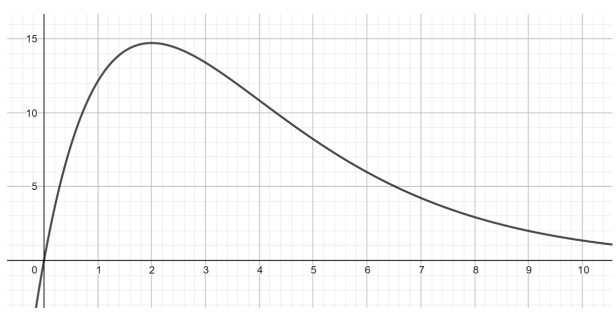
(a) (4 VP) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Konzentration ihren höchsten Wert annimmt. Wie groß ist dieser Wert?

(b) (3 VP) Das Medikament ist nur wirksam, wenn seine Konzentration im Blut mindestens 6 mg/$\ell$ beträgt. Verifizieren Sie durch Rechnung, dass das Medikament im Zeitraum von etwa 22 Minuten bis 6 Stunden nach Beobachtungsbeginn wirkt.

(c) (3 VP) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament am stärksten abgebaut wird.

(d) (4 VP) Ab 4 Stunden nach Beobachtungsbeginn wird die Konzentration des Medikaments nun näherungsweise durch die Tangente an das Schaubild von $f$ an der Stelle $t = 4$ beschrieben.

Berechnen Sie damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist.



## Lösungen

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen.

| | |
|---|---|
| $a)$ | $f(x) = (x^2 + x) \cdot \sin(x)$ |
| $b)$ | $g(b) = (b+1)e^{2b}$ |

(2) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^e \left( \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx$$

(3) Lösen Sie die Gleichung

$$\cos(\pi x) \cdot e^x = \cos(\pi x)$$

für $0 \leq x \leq 2$.

(4) Das Schaubild der Funktion $f$ in Anlage A stellt eine Borkenkäferpopulation in einem kleinen Waldtück dar (Zeit $t$ in Monaten nach Beobachtungsbeginn, $f(t)$ in 1000 Käfern).

(a) (2 VP) Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem es mehr als 6000 Käfer gibt.

(b) (2 VP) Bestimmen Sie die Änderungsrate von $f$ 4 Monate nach Beobachtungsbeginn.

(c) (1 VP) Interpretieren Sie den Wert des Integrals

$$\frac{1}{12}\int_0^{12} f(t)\,dt$$

im Sachzusammenhang.

(d) (2 VP) Interpretieren Sie die Gleichung

$$f(t+10) = f(t)$$

im Sachzusammenhang, und geben Sie eine Lösung an.

(5) Durch die Funktion $f$ mit

$$f(t) = 20t \cdot e^{-0{,}5t}$$

($t$ in Stunden seit der Einnahme, $f(t)$ in mg/$\ell$) wird die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben.

(a) (4 VP) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Konzentration ihren höchsten Wert annimmt. Wie groß ist dieser Wert?

Maximum von $f$:

$$f'(t) = (20 - 10t)e^{-0{,}5t} = 0$$

liefert $t = 2$; aus $f(2) = 14{,}7$ folgt, dass die maximale Konzentration 14,7 mg/$ell$ beträgt.

(b) (3 VP) Das Medikament ist nur wirksam, wenn seine Konzentration im Blut mindestens 6 mg/$\ell$ beträgt. Verifizieren Sie durch Rechnung, dass das Medikament im Zeitraum von etwa 20 Minuten bis 6 Stunden nach Beobachtungsbeginn wirkt.

22 Minuten sind $\frac{22}{60} \approx 0{,}37$ Stunden. $f(0{,}37) \approx 6{,}1$ und $f(6) \approx 6$. Dazwischen liegt die Konzentration darüber (Schaubild).

(c) (3 VP) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament am stärksten abgebaut wird.

Stärkste Abnahme von $f$: Tiefpunkt von $f'$, also $f''(t) = 0$. Wir finden

$$f''(t) = (5t - 20)e^{-0{,}5t} = 0$$

für $t = 4$.

(d) (4 VP) Ab 4 Stunden nach Beobachtungsbeginn wird die Konzentration des Medikaments nun näherungsweise durch die Tangente an das Schaubild von $f$ an der Stelle $t = 4$ beschrieben.

Berechnen Sie damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist.

$f(4) \approx 10{,}8$; $m = f'(4) \approx --2{,}7$; $10{,}8 = -2{,}7 \cdot 4 + b$ liefert $b \approx 21{,}6$.

Tangente $y = -2{,}7t + 21{,}6$; Nullstelle $t \approx 8$; nach 8 Stunden.