MATHEMATIK K1

06.12.2019

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Punkte (max)	3	3	2	4	3	3	7	4	1
Punkte									

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen.

a) $f(x) = \cos(2x) \cdot e^{1-x}$

b) $g(x) = 2\ln(x^2 + x + 1)$

(2) Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion.

a) $f(x) = \dfrac{1}{ex}$

b) $g(x) = 2(1-x)^4 + 1$

(3) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x}}$$

mit $F(18) = -1$.

(4) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^2 2(x^3 - x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 (\pi\cos(\tfrac{\pi}{2}x) + 1)\,dx$

(5) Zeigen Sie, dass $F(x) = \sin x - x\cos x$ eine Stammfunktion von $f(x) = x \sin x$ ist, und berechnen Sie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin(x)\, dx.$$

(6) Lösen Sie die Gleichung

$$e^{2x}(e^x + 4) = 12e^x.$$

(7) Bestimmen Sie Nullstellen und die Punkte, in welchen das Schaubild von

$$f(x) = (x^2 + 8x)e^{-x}$$

eine waagrechte Tangente besitzt.

(8) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, welche von den Schaubildern von $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$ eingeschlossen wird.

(9) Berechnen Sie 777777 : 37.

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen.

$$a) \qquad f(x) = \cos(2x) \cdot e^{1-x}$$

$$b) \qquad g(x) = 2\ln(x^2 + x + 1)$$

(2) Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion.

$$a) \qquad f(x) = \frac{1}{ex}$$

$$b) \qquad g(x) = 2(1-x)^4 + 1$$

(3) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x}}$$

mit $F(18) = -1$.

(4) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$a) \qquad \int_1^2 2(x^3 - x)\,dx$$

$$b) \qquad \int_0^1 (\pi\cos(\tfrac{\pi}{2}x) + 1)\,dx$$

(5) Zeigen Sie, dass $F(x) = \sin x - x\cos x$ eine Stammfunktion von $f(x) = x\sin x$ ist, und berechnen Sie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin(x)\,dx.$$

$$F'(x) = \cos x - \cos x + x\sin x = f(x).$$

Damit ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin(x)\,dx = \sin x - x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

(6) Lösen Sie die Gleichung

$$e^{2x}(e^x + 4) = 12e^x.$$

Ausklammern: ergibt $e^x(e^{2x} + 4e^x - 12) = 0$. Satz vom Nullprodukt: $e^x = 0$ hat keine Lösung. Vieta: $(e^x + 6)(e^x - 2) = 0$ liefert $e^x = -6$ (keine Lösung) und $e^x = 2$ mit $x_1 = \ln(2)$.

(7) Bestimmen Sie Nullstellen und die Punkte, in welchen das Schaubild von

$$f(x) = (x^2 + 8x)e^{-x}$$

eine waagrechte Tangente besitzt.

(8) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, welche von den Schaubildern von $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$ eingeschlossen wird.

Schnittstellen: $f(x) = g(x)$ liefert $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1}{x} = 0$, also nach Multiplikaion mit $2x$ die quadratische Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$. Viet liefert $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. Weil die Gerade in diesem Bereich oberhalb des Schaubilds von f liegt, folgt

$$\begin{aligned} F &= \int_1^2 \Big(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}\Big)\,dx = \frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} - \ln x \Big|_1^2 \\ &= 3 - 1 - \ln 2 - (\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{4} - \ln 1) = \frac{3}{4} - \ln 2. \end{aligned}$$

(9) Berechnen Sie 777777 : 37.