MATHEMATIK K1

F. LEMMERMEYER

Lineare Gleichungssysteme mit Parametern

Ein Beispiel eines linearen Gleichungssystems mit Parameter ist das folgende:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2r \\ 5x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 2r+6 \end{array}$$

Benutzt man zur Lösung die Methode des Kreuzprodukts, so schreibt man zuerst das LGS in Vektorform:

$$x_1\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r \\ 2 \\ 2r+6 \end{pmatrix}.$$

Dieses multipliziert man dann mit dem Vektor

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

und erhält

$$x_1(33-5+6) = 22r - 2 + 6(2r+6) = 34r+34,$$

also $x_1 = r+1$.

Entsprechend folgt wegen

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$x_2(18-28-24) = -18r + 14 - 8(2r+6) = -34r - 34$$

und damit $x_2 = r+1$. Einsetzen in die ersten Gleichung liefert dann $x_3 = r-1$.

Übungen.

(1) Löse das folgende LGS mit Parameter:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & r+2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6+6r \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 3r-6 \end{array}$$

(2) Löse das folgende LGS mit Parameter:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2r+4 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & -14 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 1-r \end{array}$$

Schnittgerade zweier Ebenen

Wir wollen noch einmal die wichtigsten Methoden zur Bestimmung der Schnittgerade zweier nicht paralleler Ebenen besprechen.

Kreuzprodukt der Normalenvektoren. Der Normalenvektor einer Ebene steht senkrecht auf jeden in der Ebene liegenden Vektor. Weil der Richtungsvektor der Schnittgeraden zweier Ebenen in beiden Ebenen liegt, muss er auf beide Normalenvektoren senkrecht stehen. Man kann als Richtungsvektor daher immer das Kreuzprodukt der Normalenvektoren nehmen. Einen gemeinsamen Punkt findet man leicht durch Probieren.

Beispiel: Gesucht ist die Schnittgerade der Ebenen $E : 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1$ und $D : 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$. Wir finden

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 26 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Jetzt suchen wir einen Punkt, der auf beiden Ebenen liegt. Wir versuchen es mit einem Punkt $P(0|x_2|x_3)$ in der x_2x_3-Ebene. Einsetzen von $x_1 = 0$ ergibt die beiden Gleichungen

$$-4x_2 + x_3 = 1 \qquad \text{(I)}$$
$$2x_2 - 3x_3 = 6 \qquad \text{(II)}$$

Eliminieren von x_2 durch (I) + 2(II) liefert $-5x_3 = 13$, also $x_3 = -\frac{13}{5}$ und dann $x_2 = -\frac{9}{10}$. Also ist die gesuchte Geradengleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{9}{10} \\ -\frac{13}{5} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Zwei Punkte durch Probieren. Man kann auch zwei verschiedene Punkte der Schnittgeraden durch Probieren bestimmen. Wir betrachten wieder die beiden Ebenen $E : 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1$ und $D : 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$. Wir suchen zwei Punkte, die auf beiden Ebenen liegen, etwa $P(0|a|b)$ und $Q(1|c|d)$. Einsetzen von P liefert wie oben das LGS in zwei Variablen

$$\begin{aligned} -4a + b &= 1 && \text{(I)} \\ 2a - 3b &= 6 && \text{(II)} \end{aligned}$$

und wieder die Lösung $a = -\frac{9}{10}$ und $b = -\frac{13}{5}$.

Einsetzen von Q dagegen ergibt

$$\begin{aligned} 3 - 4c + d &= 1 && \text{(I)} \\ 5 + 2c - 3d &= 6 && \text{(II)} \end{aligned}$$

Mit (I) + 2(II) folgt jetzt $13 - 5d = 13$, also $d = 0$ und damit $c = \frac{1}{2}$.

Damit haben wir die beiden Punkte $P(0| - \frac{9}{10}| - \frac{13}{5})$ und $Q(1|\frac{1}{2}|0)$. Der Richtungsvektor der Schnittgeraden ist also

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{9}{10} \\ -\frac{13}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7}{5} \\ \frac{13}{5} \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7}{5} \\ \frac{13}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

erhalten wir damit wieder

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{9}{10} \\ -\frac{13}{5} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

als Gleichung der Schnittgeraden.

Rechnen mit Parameter. Anstatt Punkte der Schnittgerade mit $x_1 = 0$ und $x_1 = 1$ zu suchen, kann man die Rechnung in einem Aufwasch durchführen, wenn man $x_1 = t$ setzt. Man erhält so, wenn man die Ausdrücke mit t nach rechts bringt,

$$\begin{aligned} -4x_2 + x_3 &= 1 - 3t \\ 2x_2 - 3x_3 &= 6 - 5t \end{aligned}$$

Addiert man (wie oben) die ersten zum Doppelten der zweiten Gleichung, so folgt

$$-5x_3 = 1-3t+2(6-5t) = 1-3t+12-10t = 13-13t, \quad \text{d.h,} \quad x_3 = -\frac{13}{5}+\frac{13}{5}t.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt
$$2x_2 = 6 - 5t + 3x_3 = \frac{30}{5} - \frac{25}{5}t - \frac{39}{5} + \frac{39}{5}t = -\frac{9}{5} + \frac{14}{5}t,$$
woraus man nach Division durch 2
$$x_2 = -\frac{9}{10} + \frac{7}{5}t$$
erhält. Damit haben wir die drei Gleichungen
$$\begin{aligned} x_1 &= & & & t \\ x_2 &= & -\tfrac{9}{10} &+ & \tfrac{7}{5}t \\ x_3 &= & -\tfrac{13}{5} &+ & \tfrac{13}{5}t. \end{aligned}$$
Diese drei Gleichungen sind schon die Geradengleichung:
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{9}{10} \\ -\frac{13}{5} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7}{5} \\ \frac{13}{5} \end{pmatrix}.$$

Übungen.

(3) Bestimme die Schnittgerade der beiden Ebenen
$$E : x_3 = 3 \quad \text{und} \quad F : x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4.$$

(4) Bestimme die Schnittgerade der beiden Ebenen
$$E : 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \quad \text{und} \quad F : x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1.$$

(5) Gegeben ist die Ebenenschar $e_a : x_1 + (1-a)x_2 + (a-3)x_3 = 3$.

a) Zeige, dass die Ebene $E : x_1 - 3x_2 + x_3 = 3$ zur Ebenenschar gehört.

b) Zeige, dass es eine Gerade gibt, welche in allen Ebenen E_a enthalten ist.

Hinweis: Hier geht man so vor, dass man zuerst die Schnittgerade zweier Ebenen bestimmt, etwa von E_0 und E_1. Dann zeigt man, dass diese Gerade in allen Ebenen enthalten ist (Schneiden muss die Gleichung $0 = 0$ ergeben).

youtube. Siehe auch youtube-1 und youtube-2.

Lösungen

(1) Löse das folgende LGS mit Parameter:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & r+2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6+6r \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 3r-6 \end{array}$$

Schreiben des LGS in Vektorform:

$$x_1\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r+2\\6+6r\\3r-6\end{pmatrix}.$$

Berechnung des Kreuzprodukts:

$$\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\-7\\-2\end{pmatrix}.$$

Multiplikation der Gleichung mit diesem Vektor liefert

$$x_1\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r+2\\6+6r\\3r-6\end{pmatrix} \qquad \Big| \quad \cdot \begin{pmatrix}15\\-7\\-2\end{pmatrix}$$

$$(30-7-12)x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 15(r+2) - 7(6+6r) - 2(3r-6),$$

also $11x_1 = 15r + 30 - 42 - 42r - 6r + 12 = -33r$ und damit $x_1 = -3r$. Einsetzen ergibt

$$\begin{array}{rcrcrcl} -6r & + & x_2 & + & x_3 & = & r+2 \\ -3r & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6+6r \\ -18r & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 3r-6 \end{array}$$

Addition der beiden letzten Gleichungen liefert

$$-21r + 5x_3 = 9r, \quad \text{also} \quad x_3 = 6r.$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $-6r + x_2 + 6r = r + 2$, also $x_2 = r + 2$.

Also ist die Lösung gegeben durch

$$x_1 = -3r, \quad x_2 = r + 2, \quad x_3 = 6r.$$

(2) Löse das folgende LGS mit Parameter:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2r+4 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & -14 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 1-r \end{array}$$

Wir gehen vor wie oben.

$$x_1\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\-5\\-1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2r+4\\-14\\1-r\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-5\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-19\\-5\\6\end{pmatrix}$$

$$x_1\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\-5\\-1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2r+4\\-14\\1-r\end{pmatrix} \qquad \Big| \cdot \begin{pmatrix}-19\\-5\\6\end{pmatrix}$$

$$(-19-15+12)x_1 = -38r - 76 + 70 + 6 - 6r$$

$$-22x_1 = -44r$$

$$x_1 = 2r$$

Addition der ersten und dritten Gleichung ergibt $3x_1 + 5x_3 = r+5$, also $x_3 = 1-r$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $x_2 = r+3$.

(3) Bestimme die Schnittgerade der beiden Ebenen

$$E : x_3 = 3 \quad \text{und} \quad F : x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4.$$

Einsetzen von $x_3 = 3$ in die zweite Gleichung ergibt $x_1 + 2x_2 = 10$. Mit $x_2 = t$ folgt $x_1 = 10 - 2t$, also

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & = & 10 & - & 2t, \\ x_2 & = & & & t, \\ x_3 & = & 3 & & \end{array}$$

und damit $\vec{x} = \begin{pmatrix}10\\0\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ als Gleichung der Schnittgeraden.

Probe durch Einsetzen in die Gleichung von F: $10-2t+2t-6 = 4$ ist äquivalent zu $0 = 0$, also liegt die Gerade in F. Wie man an der x_3-Koordinate sehen kann, liegt sie auch in E.

(4) Bestimme die Schnittgerade der beiden Ebenen

$$E : 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \quad \text{und} \quad F : x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1.$$

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden ist

$$\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\-5\end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen noch einen Punkt auf beiden Ebenen, etwa mit $x_3 = 0$. Dann hat man $2x_1 + x_2 = -1$ und $x_1 - 2x_2 = 1$; dies liefert $x_1 = -\frac{1}{5}$ und $x_2 = \frac{3}{5}$, also

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(5) *Gegeben ist die Ebenenschar* $E_a : x_1 + (1-a)x_2 + (a-3)x_3 = 3$.

a) *Zeige, dass die Ebene* $E : x_1 - 3x_2 + x_3 = 3$ *zur Ebenenschar gehört.*

Weil die rechten Seiten gleich sind, müssen auch die linken gleich sein. Also ist $1 - a = -3$ und $a - 3 = 1$, also $a = 4$. In der Tat ist $E_4 = E$.

b) *Zeige, dass es eine Gerade gibt, welche in allen Ebenen* E_a *enthalten ist.*

Es ist $E_1 : x_1 - 2x_3 = 3$ und $E_3 : x_1 - 2x_2 = 3$. Der Richtungsvektor der Schnittgeraden ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Setzt man $x_1 = 1$, folgt $x_2 = -1$ und $x_3 = -1$, und tatsächlich liegt $P(1|-1|-1)$ auf beiden Ebenen. Also ist

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Schnittgerade von E_1 und E_3.

Jetzt zeigen wir, dass g in jeder Ebene E_a liegt. Schneiden ergibt

$$3 = 1 + 2t + (1-a)(-1+t) + (a-3)(-1+t)$$

Zusammenfassen ergibt $3 = 3$. Diese Gleichung ist für alle t und alle a richtig, also liegt g in jedem E_a.